

(Analisi) Matematica I - 20 maggio 2006

B

**Esercizio 1**

E' data la funzione

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 + 16)}{(x - 2)^2}$$

a) Calcolare l' integrale indefinito  $\int f(x)dx$ .

♣b) (solo per gli alunni della Terza Facoltà) Calcolare l'integrale improprio  $\int_4^{+\infty} f(x) dx$ .

## Esercizio 2

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{3 \ln x - 6}{x} + 2.$$

- a) Trovare il dominio
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- b) Calcolarne i limiti agli estremi del dominio e indicare gli eventuali asintoti
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- c) Calcolare la derivata prima e gli intervalli di monotonia di  $f$ . Trovare gli eventuali punti di massimo e minimo di  $f$ , specificando se relativi o assoluti
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- d) Disegnare un grafico qualitativo di  $f$

e) Provare (**SENZA FARE CALCOLI**, ma facendo riferimento ad opportune proprietà teoriche) che  $f$  deve avere uno e un solo zero, e dire tra quali due interi consecutivi cade tale zero. (Si ricordi che  $\ln 2 \approx 0,693$ )

f) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 2 della funzione  $f(x)$  centrato nel punto  $x = 1$ .

♣g) (solo per gli alunni della Terza Facoltà) Trovare l'equazione della retta tangente e della parabola osculatrice al grafico di  $f$  nel punto di ascissa  $x = 1$ .

h) Utilizzando i risultati precedenti, calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 9x + 13}{(x - 1)^2}$$

◇ **Esercizio 3** (*solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà*)

Una ditta di giocattoli ha prodotto 284 cubi, di cui 48 blu, 124 viola, 80 neri e 32 gialli. Tra tutti ce ne sono 42 di legno e i rimanenti sono di plastica.

Un magazziniere deve confezionarli tutti in sacchetti contenenti ciascuno 4 cubi.

Indicare **motivando opportunamente le risposte** quanti diversi tipi di confezione può formare nelle seguenti circostanze:

a) se vuole che contengano cubi solo blu o solo gialli o di entrambi i colori

b) se vuole essere sicuro che non contengano nessun cubo di legno

c) se vuole essere sicuro che ogni sacchetto contenga almeno un cubo di legno

d) se vuole essere sicuro che ogni sacchetto contenga esattamente due cubi viola

♣ **Esercizio 4** (solo per gli alunni della Terza Facoltà)

(A) Enunciare il criterio del confronto per la convergenza delle serie a termini di segno positivo.

(B) E' data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{4^n}.$$

(1) Provare che converge, e calcolarne la somma

(2) Dire se converge la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{4^{n^2}}$ . Che cosa si può dire sulla sua somma?

(3) Dire se converge la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{3^n}{4^n} + \left( \sin \frac{13\pi}{6} \right)^n \right]$  e, in caso affermativo, calcolarne la somma.