

(Analisi) Matematica I - 20 maggio 2006

A

Esercizio 1

E' data la funzione

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 + 9)}{(x - 1)^2}$$

a) Calcolare l' integrale indefinito $\int f(x)dx$.

♣b) (solo per gli alunni della Terza Facoltà) Calcolare l'integrale improprio $\int_3^{+\infty} f(x) dx$.

e) Provare (**SENZA FARE CALCOLI**, ma facendo riferimento ad opportune proprietà teoriche) che f deve avere uno e un solo zero, e dire tra quali due interi consecutivi cade tale zero. (Si ricordi che $\ln 2 \approx 0,693$)

f) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 2 della funzione $f(x)$ centrato nel punto $x = 1$.

♣g) (solo per gli alunni della Terza Facoltà) Trovare l'equazione della retta tangente e della parabola osculatrice al grafico di f nel punto di ascissa $x = 1$.

h) Utilizzando i risultati precedenti, calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 6x + 7}{(x - 1)^2}$$

◇ **Esercizio 3** (solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà)

Una ditta ha prodotto 325 magliette, di cui 25 nere, 125 verdi, 100 rosse e 75 gialle. Tra esse ce ne sono 50 difettose.

Un magazziniere deve confezionarle tutte in scatole contenenti ciascuna 5 pezzi.

Indicare **motivando opportunamente le risposte** quante diversi tipi di confezioni può formare nelle seguenti circostanze:

a) se vuole che contengano magliette solo rosse o solo verdi o di entrambi i colori

b) se vuole essere sicuro che non contengano nessuna maglietta difettosa

c) se vuole essere sicuro che ogni scatola contenga almeno una maglietta difettosa

d) se vuole essere sicuro che ogni scatola contenga esattamente due magliette gialle.

♣ **Esercizio 4** (solo per gli alunni della Terza Facoltà)

(A) Enunciare il criterio del confronto per la convergenza delle serie a termini di segno positivo.

(B) E' data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n}.$$

(1) Provare che converge, e calcolarne la somma.

(2) Dire se converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n^2}}$. Che cosa si può dire sulla sua somma?

(3) Dire se converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2^n}{3^n} + \left(\cos \frac{7\pi}{3} \right)^n \right]$ e, in caso affermativo, calcolarne la somma.