

Esercizio 1

a) Dire che cosa si intende per serie geometrica di ragione q e discuterne la convergenza al variare di $q \in \mathbb{R}$.

b) Dire se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{5^n}$ converge; in caso affermativo, calcolarne la somma.

c) Enunciare il criterio del confronto per la convergenza delle serie a termini di segno positivo.

d) Confrontandola con la serie del punto b), si studi la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{5^{n^2}}$.

Esercizio 2

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - x - 6}$$

- a) Trovare il dominio di $f(x)$, gli zeri e il segno.
- b) Calcolare i limiti agli estremi del dominio e indicare gli eventuali asintoti.
- c) Calcolare la derivata prima, gli intervalli di monotonia, gli eventuali punti di massimo e minimo di f
- ♣ d) Dire qual è il massimo intervallo contenente il punto $x = 1$ in cui f è invertibile.
- ♣ e) Trovare l'insieme immagine di f .

f) Tracciare un grafico qualitativo di f

g) Enunciare il teorema di Lagrange.

Applicando il teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6}$ nell'intervallo $[0, 1]$, provare che esiste $c \in (0, 1)$ per cui $f'(c) = -\frac{1}{6}$.

h) Trovare l'area della regione finita di piano compresa tra il grafico di $f(x)$ e l'asse delle ascisse, per $x \in [0, 1]$.

Esercizio 3

E' data la funzione $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

♣ a) Calcolare l' integrale improprio $\int_1^2 f(x) dx$.

♣ b) Calcolare l' integrale improprio $\int_2^{+\infty} f(x) dx$.

Esercizio 4

a) Determinare il polinomio di Taylor di $f(x) = x \ln(x + 2)$ di ordine 2, centrato in $x_0 = -1$.

b) Trovare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x \ln(x + 2)$ nel punto di ascissa $x = -1$.

♣ c) Sfruttando il risultato trovato in a), calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{2x + 2}$.