

(Analisi) Matematica I - 18 novembre 2006

A

Esercizio 1

E' data la funzione

$$f(x) = 2\sqrt[3]{x} \ln x - \frac{7 \sin x}{\sqrt[5]{(1 - \cos x)^4}}$$

(a) Calcolare l' integrale indefinito $\int f(x)dx$.

(b) ♣ (solo per gli alunni della Terza Facoltà) Calcolare l'integrale improprio $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$.

ESERCIZIO 2.

Data la funzione

$$f(x) = \arctan(3x) - \frac{3}{2}x$$

- (a) determinare il dominio di $f(x)$ ed eventuali proprietà di simmetria di f ; trovare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti
- (b) determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$; trovare gli eventuali punti di estremo e classificarli
- (c) dopo avere studiato se f interseca gli (eventuali) asintoti, tracciare un grafico qualitativo di f , tenendo conto di tutte le informazioni ottenute nei punti precedenti

(d) **SENZA FARE CALCOLI ALGEBRICI**, ma sfruttando le informazioni precedenti, dire se esistono valori di $\lambda \in \mathbf{R}$ per cui l'equazione $f(x) = \lambda$ ammette tre soluzioni, e, in caso affermativo, indicare quali sono tali valori di λ .

(e) Enunciare il teorema di Lagrange.

Applicare il teorema di Lagrange alla funzione $f(x)$ sull'intervallo $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e trovare i punti di Lagrange di f su tale intervallo.

ESERCIZIO 3.

E' data la funzione

$$f(x) = 4x - \sqrt{1 + 4x} + \sqrt{1 - 4x}.$$

(a) Calcolare lo sviluppo di ordine 3 di MacLaurin di $f(x)$

(b) Dire se esiste un intorno del U punto $x = 0$ in cui si abbia $f(x) \leq 0$, $\forall x \in U$

(c) Senza fare ulteriori calcoli, dire quanto vale $f''(0)$

(d) Calcolare il seguente limite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2 \ln(1+x)}$

(e)♣ (solo per gli alunni della Terza Facoltà) Senza fare ulteriori calcoli, ma sfruttando i risultati

del punto (a), dire se converge l'integrale improprio $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x^2 \sqrt{x} \ln(1+x)} dx$

◇ **Esercizio 4** (*solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà*)

Cinque viaggiatori devono occupare uno scompartimento di treno da sei posti.

a) Dire, motivando la risposta, quanti sono tutti i possibili modi in cui i viaggiatori possono scegliere di occupare i posti, se non ci sono restrizioni.

b) Dire, motivando la risposta, in quanti possibili modi possono scegliere i posti, se uno dei viaggiatori vuole assolutamente sedersi accanto al finestrino e nella direzione di marcia (e gli altri sono gentili).

c) Dire, motivando la risposta, quanti sono tutti i possibili modi in cui i viaggiatori possono scegliere di occupare i posti, se due dei viaggiatori devono necessariamente sedersi l'uno accanto all'altro.

♣ **Esercizio 5** (solo per gli alunni della Terza Facoltà)

(A) Dire che cosa è una serie a termini di segno variabile e quali criteri di convergenza si conoscono al riguardo.

(B) Data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^3}{2^n}$$

(1) dire se converge assolutamente

(2) dire se converge

(3) dedurre il valore del limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2^n}$ e dire che cosa si può concludere circa gli ordini di infinito delle funzioni $f(n) = n^3$ e $g(n) = 2^n$.