

Esercizio 1

(A) Definire che cosa è una primitiva di una funzione $f(x)$ su un intervallo I e che cosa è l'integrale indefinito di $f(x)$ su I .

(B) E' data la funzione

$$g(x) = \frac{\arctan(5x)}{7x^2}.$$

(B₁) Trovare la primitiva di $g(x)$ che si annulla per $x = \frac{1}{5}$.

♣ (B₂) (solo per gli alunni della Terza Facoltà) Calcolare l'integrale improprio $\int_{\frac{1}{5}}^{+\infty} g(x) dx$.

ESERCIZIO 2. Si consideri la funzione $f(x) = 2x\sqrt{9 - x^2}$. Si chiede di:

(a) determinare il dominio, il segno, gli zeri ed eventuali simmetrie della funzione $f(x)$, ;

(b) determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto;

(c) tracciare il grafico di $f(x)$ utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti;

(d) Enunciare il teorema di Lagrange.

(e) Dire se la funzione $f(x) = 2x\sqrt{9 - x^2}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange sull'intervallo $I = [-3, 3]$.

Esercizio 3

E' data la funzione $f(x) = 4 \sin(6x) - 24x - 6x \ln(1 - 12x^2)$.

(a) Trovare lo sviluppo di MacLaurin di ordine 3 di $f(x)$;

(b) provare che il punto $x = 0$ è un punto di stazionarietà per $f(x)$ e indicarne la natura (punto di massimo, minimo o flesso);

(c) utilizzando lo sviluppo trovato, calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$.

♣ (d) (solo per gli alunni della Terza Facoltà) Dire se converge l'integrale improprio $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^4 \sqrt{x}} dx$.

◇ **Esercizio 4** (solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà)

In una scatola ci sono 24 lampadine da 60 Watt e 32 lampadine da 15 Watt, tutte distinte tra di loro.

Si sa che 4 lampadine da 60 Watt e 8 lampadine da 15 Watt sono difettose.

Vengono confezionate scatole contenenti 4 lampadine ciascuna.

Indicare **motivando opportunamente le risposte** in quanti modi diversi si può confezionare una scatola nelle seguenti circostanze:

a) se non si hanno restrizioni

b) se si considerano scatole contenenti 2 lampadine da 60 Watt non difettose e 2 lampadine da 15 Watt non difettose

c) se si vuole che le scatole contengano almeno una lampadina difettosa (di qualunque potenza)

d) se si vogliono scatole contenenti almeno una lampadina da 15 Watt difettosa.

♣ **Esercizio 5** (solo per gli alunni della Terza Facoltà)

(A) Definire che cosa significa che una serie numerica è convergente e indicare una condizione necessaria per la convergenza.

(B) Di una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si sa che $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 7$. Allora:

(B₁) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 7$ VERO FALSO perché:

(B₂) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{7}$ VERO FALSO perché:

(B₃) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ VERO FALSO perché:

(B₄) nessun termine della serie può essere uguale a 7 VERO FALSO perché: