Esercizio 1

(A) Definire che cosa è una primitiva di una funzione $f(x)$ continua su un intervallo I e che cosa è l'integrale indefinito di $f(x)$ su I.

Una primitiva di una funzione $f(x)$ continua su un intervallo I è una funzione $F(x)$ derivabile su I, tale che $F'(x) = f(x), \forall x \in$I. Le primitive di $f(x)$ su I sono infinite e differiscono tra loro per una costante.

L'integrale indefinito di $f(x)$ su I è l'insieme di tutte le primitive di $f(x)$ su I.

(B) E' data la funzione

$$g(x) = \frac{\arctan(3x)}{5x^2}.$$

(B_1) Trovare la primitiva di $g(x)$ che si annulla per $x = \frac{1}{3}$.

Le primitive della funzione $g(x)$ si trovano considerando l'integrale indefinito $\int g(x)\,\mathrm{d}x$, che risolviamo per parti, ricordando che una primitiva della funzione $\frac{1}{x^2}$ è la funzione $-\frac{1}{x}$.

$$\int \frac{\arctan(3x)}{5x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5x}\arctan(3x) + \int \frac{1}{5x}\frac{3}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5x}\arctan(3x) + \frac{3}{5}\int \frac{1}{x(1+9x^2)}\,\mathrm{d}x .$$

Per risolvere l'ultimo integrale possiamo utilizzare il metodo di decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{1}{x(1+9x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+9x^2} = \frac{A(1+9x^2)+x(Bx+C)}{x(1+9x^2)} = \frac{(9A+B)x^2+Cx+A}{x(1+9x^2)}$$

Uguagliando i coefficienti dei due polinomi a numeratore, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} 9A+B = 0 \\ C = 0 \\ A = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = -9 \\ C = 0 \end{cases}$$

E quindi:

$$\int \frac{1}{x(1+9x^2)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{9x}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+9x^2) + k.$$

Dunque, le primitive di $g(x)$ sono tutte le funzioni:

$$G(x) = -\frac{1}{5x}\arctan(3x) + \frac{3}{5}\left(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+9x^2)\right) + c$$

La primitiva tale che $G(\frac{1}{3}) = 0$ si ha se

$$0 = -\frac{3}{5}\frac{\pi}{4} + \frac{3}{5}\left(\ln\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\ln(1+1)\right) + c \implies 0 = -\frac{3\pi}{20} - \frac{3}{5}\ln 3\sqrt{2} + c \implies c = \frac{3\pi}{20} + \frac{3}{5}\ln 3\sqrt{2}.$$

Infine, la primitiva cercata è la funzione

$$G(x) = -\frac{1}{5x}\arctan(3x) + \frac{3}{5}\left(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+9x^2)\right) + \frac{3\pi}{20} + \frac{3}{5}\ln 3\sqrt{2}.$$

♣ *(B_2) (solo per gli alunni della Terza Facoltà) Calcolare l'integrale improprio* $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{+\infty} g(x)\,dx$.

Per definizione di integrale improprio di prima specie:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{3}}^{+\infty} \frac{\arctan(3x)}{5x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{t\to+\infty}\int_{\frac{1}{3}}^{t} \frac{\arctan(3x)}{5x^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{5t}\arctan(3t) + \frac{3}{5}\ln\frac{|t|}{\sqrt{1+9t^2}} + \frac{3\pi}{20} + \frac{3}{5}\ln 3\sqrt{2}\right) = \\ &= \frac{3}{5}\ln\frac{1}{3} + \frac{3\pi}{20} + \frac{3}{5}\ln 3\sqrt{2} = \frac{3\pi}{20} + \frac{3}{5}\ln\sqrt{2} . \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2. *Si consideri la funzione* $f(x) = 3x\sqrt{4 - x^2}$.

(a) *Determinare il dominio, il segno, gli zeri ed eventuali simmetrie della funzione* $f(x)$

Dobbiamo imporre che il radicando $4 - x^2$ sia positivo, e dunque $\text{Dom } f = [-2, 2]$.

Poiché che la funzione radice aritmetica è positiva o nulla, si ha:

$$\begin{array}{lcl} f(x) = 0 & \iff & x = 0 \ \vee \ x = \pm 2 \\ f(x) > 0 & \iff & x > 0 \\ f(x) < 0 & \iff & x < 0 \end{array}$$

Osserviamo che $f(x)$ è dispari; infatti $f(-x) = 3(-x)\sqrt{4 - (-x)^2} = -f(x)$. Pertanto il grafico di $f(x)$ è simmetrico rispetto all'origine degli assi.

(b) *Determinare gli intervalli di monotonia di* $f(x)$ *e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto*

Per determinare gli intervalli di monotonia di $f(x)$, calcoliamone la derivata prima e studiamone zeri e segno:

$$f'(x) = 3\left(\sqrt{4 - x^2} + x\,\frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}}\right) = 3\,\frac{4 - x^2 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = 6\,\frac{2 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

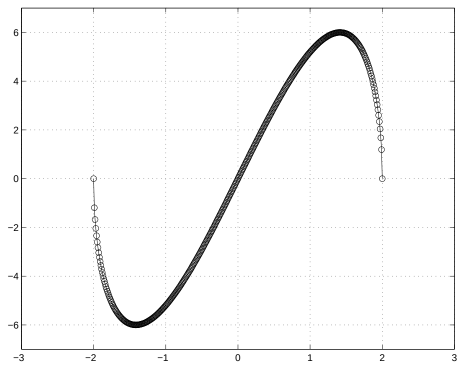
Poiché il denominatore è sempre positivo, si ha

$$\begin{array}{lclcl} f(x) = 0 & \iff & 2 - x^2 = 0 & \iff & x = \pm\sqrt{2} \\ f(x) > 0 & \iff & 2 - x^2 > 0 & \iff & -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ f(x) < 0 & \iff & 2 - x^2 < 0 & \iff & -2 < x < -\sqrt{2} \ \vee \ \sqrt{2} < x < 2 \end{array}$$

Se ne deduce che i punti $x = \pm\sqrt{2}$ sono due punti critici di $f(x)$, che $f(x)$ è crescente nell'intervallo $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, mentre è decrescente negli intervalli $(-2, -\sqrt{2})$ e $(\sqrt{2}, 2)$; pertanto $x = -\sqrt{2}$ è un punto di minimo assoluto, e $x = \sqrt{2}$ è un punto di massimo assoluto.

(c) *Tracciare il grafico di* $f(x)$ *utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti*

La Figura sottostante visualizza il grafico qualitativo di $f(x)$.



(d) *Enunciare il teorema di Rolle.*

Il teorema di Rolle afferma che, se una funzione $f(x)$ soddisfa alle seguenti ipotesi:

- $f(x)$ è continua sull'intervallo chiuso limitato $[a, b]$
- $f(x)$ è derivabile sull'intervallo aperto (a, b)
- $f(a) = f(b)$

allora esiste (almeno) un punto $\xi \in (a, b)$ tale che $f'(\xi) = 0$.

(e) *Dire se la funzione* $f(x) = 3x\sqrt{4 - x^2}$ *soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle sull'intervallo* $I = [-2, 2]$.

La funzione $f(x) = 3x\sqrt{4 - x^2}$ è continua nell'intervallo chiuso $[-2, 2]$ (che è il suo dominio) e derivabile nell'intervallo aperto $(-2, 2)$ (non è invece derivabile nei punti estremi del suo dominio); inoltre $f(-2) = f(2)(= 0)$. Pertanto il teorema di Rolle è applicabile a $f(x)$ nell'intervallo $[-2, 2]$ (infatti, come abbiamo visto, nei punti $x = \pm\sqrt{2}$ la derivata prima di f si annulla).

Esercizio 3
E' data la funzione $f(x) = 3x\ln(1-3x^2) - 4\sin(3x) + 12x$.

(a) *Trovare lo sviluppo di MacLaurin di ordine 3 di $f(x)$*

Utilizzando gli sviluppi di MacLaurin di ordine 3 noti:

$\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} + o(u^3)$ (per $u \to 0$)

$\sin t = t - \dfrac{t^3}{3!} + o(t^3)$ (per $t \to 0$)

ed effettuando le sostituzioni $u = -3x^2$ e $t = 3x$, possiamo scrivere gli sviluppi di MacLaurin di:

$\ln(1-3x^2) = -3x^2 - \dfrac{(-3x^2)^2}{2} + \dfrac{(-3x^2)^3}{3} + o((-3x^2)^3) = -3x^2 - \dfrac{9}{2}x^4 - \dfrac{27}{3}x^6 + o(x^6)$

$\sin(3x) = 3x - \dfrac{(3x)^3}{6} + o((3x)^3) = 3x - \dfrac{27}{6}x^3 + o(x^3)$

Dunque lo sviluppo di MacLaurin di ordine 3 della funzione $f(x)$ risulta essere:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x\ln(1-3x^2) - 4\sin(3x) + 12x = \\ &= 3x(-3x^2 + o(x^3)) - 4\left(3x - \frac{9x^3}{2} + o(x^3)\right) + 12x = \\ &= -9x^3 - 12x + 18x^3 + o(x^3) + 12x = \\ &= 9x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

(b) *Provare che il punto $x = 0$ è un punto di stazionarietà per $f(x)$ e indicarne la natura (punto di massimo, minimo o flesso)*

Per vedere che tipo di punto è il punto $x = 0$ per f, occorre ricordare che il comportamento locale in $x = 0$ della funzione $f(x)$ è identico a quello del suo polinomio di MacLaurin $T_3(x) = 9x^3$.

La parabola cubica osculatrice $y = 9x^3$ ha in $x = 0$ un punto di flesso (a tangente orizzontale); pertanto la funzione $f(x)$ ha anch'essa un punto di flesso (a tangente orizzontale) in $x = 0$.

(c) *Utilizzando lo sviluppo trovato, calcolare* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^3}$.

Nel calcolo del limite per $x \to 0$ possiamo utilizzare al posto di $f(x)$ il suo polinomio di MacLaurin in quanto il comportamento locale per $x \to 0$ di una funzione coincide con quello del suo polinomio di MacLaurin. Dunque:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9x^3}{x^3} = 9.$

♣ (d) *(solo per gli alunni della Terza Facoltà) Dire se converge l'integrale improprio* $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x^3\sqrt{x}}\,dx$.

Utilizzando il criterio del confronto asintotico, possiamo asserire che, poiché il comportamento della funzione $\dfrac{f(x)}{x^3\sqrt{x}}$ in un intorno destro di $x = 0$ coincide con quello della funzione $\dfrac{9x^3}{x^3\sqrt{x}} = \dfrac{9}{\sqrt{x}}$, e poiché converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{9}{\sqrt{x}}\,dx$, risulta essere convergente anche l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x^3\sqrt{x}}\,dx$.

♢ **Esercizio 4** (*solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà*)

In una scatola ci sono 36 lampadine da 100 Watt e 16 lampadine da 20 Watt, tutte distinte tra di loro.
Si sa che 8 lampadine da 100 Watt e 4 da 20 Watt sono difettose.
Vengono confezionate scatole contenenti 4 lampadine ciascuna.

Indicare **motivando opportunamente le risposte** *in quanti modi diversi si puó confezionare una scatola nelle seguenti circostanze:*

a) *se non si hanno restrizioni*

In questo caso si devono considerare tutte le 52 lampadine e prenderle a 4 a 4 per formare i diversi tipi di scatola. Poiché non conta l'ordine di scelta e non ci sono ripetizioni, si devono considerare le combinazioni (senza ripetizioni) di 52 elementi presi a 4 a 4. Pertanto sono:

$$\mathrm{C}_{52,4} = \binom{52}{4} = \frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 270725$$

b) *se si considerano scatole contenenti 2 lampadine da 100 Watt non difettose e 2 lampadine da 20 Watt non difettose*

Ci sono 28 lampadine da 100 Watt non difettose e 12 lampadine da 20 Watt non difettose.

Le 28 lampadine da 100 Watt non difettose si possono prendere a 2 a 2 in $\mathrm{C}_{28,2}$ modi possibili; in modo analogo le 12 lampadine da 20 Watt non difettose si possono prendere a 2 a 2 in $\mathrm{C}_{12,2}$ modi possibili.

Dunque tutte le possibili scatole contenenti 2 lampadine da 100 Watt non difettose e 2 lampadine da 20 Watt non difettose sono:

$$\mathrm{C}_{28,2} \cdot \mathrm{C}_{12,2} = \binom{28}{2} \cdot \binom{12}{2} = \frac{28 \cdot 27}{2 \cdot 1} \cdot \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 24948$$

c) *se si vuole che le scatole contengano almeno una lampadina difettosa (di qualunque potenza)*

Ci sono in tutto 40 lampadine non difettose. Dunque le possibili scatole contenenti solo lampadine non difettose sono $\mathrm{C}_{40,4}$. Queste vanno escluse, se si devono avere scatole che contengano almeno una lampadina difettosa (di qualunque potenza).

Pertanto le possibili scatole che contengono almeno una lampadina difettosa sono

$$\mathrm{C}_{52,4} \; - \; \mathrm{C}_{40,4} = 179335$$

d) *se si vogliono scatole contenenti almeno una lampadina da 100 Watt difettosa.*

Possiamo procedere come nel punto precedente.
Ci sono 28 lampadine da 100 Watt non difettose; ci sono dunque 44 lampadine nel gruppo (che chiameremo G) formato dalle 28 lampadine da 100 Watt non difettose e dalle 16 lampadine da 20 Watt (qualunque, difettose o non difettose).
Le possibili scatole che contengone solo lampadine prese nel gruppo G sono $\mathrm{C}_{44,4}$.
Queste vanno escluse, se si devono avere scatole che contengano almeno una lampadina difettosa da 100 Watt.
Dunque le possibili scatole contenenti almeno una lampadina da 100 Watt difettosa sono

$$\mathrm{C}_{52,4} \; - \; \mathrm{C}_{44,4} = 134974.$$

Si perviene allo stesso risultato procedendo 'per somma' anziché 'per differenza'; si pensi che le scatole richieste possono avere una lampadina da 100 Watt difettosa e tre lampadine del gruppo G, oppure due lampadine da 100 Watt difettose e due lampadine del gruppo G, oppure tre lampadine da 100 Watt difettose e una lampadina del gruppo G, o infine quattro lampadine da 100 Watt difettose e nessuna lampadina del gruppo G. Sommando tutti questi numeri possibili di scatole si ottiene (come sopra):

$$\mathrm{C}_{8,1} \cdot \mathrm{C}_{44,3} + \mathrm{C}_{8,2} \cdot \mathrm{C}_{44,2} + \mathrm{C}_{8,3} \cdot \mathrm{C}_{44,1} + \mathrm{C}_{8,4} = 134974.$$

♣ **Esercizio 5** (*solo per gli alunni della Terza Facoltà*)

(*A*) *Definire che cosa significa che una serie numerica è convergente e indicare una condizione necessaria per la convergenza.*

Una serie numerica $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è convergente se converge la successione numerica (S_n) delle somme parziali, dove $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Data una qualsiasi serie numerica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, la condizione $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ è necessaria (ma non sufficiente) per la convergenza della serie; cioè, se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora necessariamente si deve avere $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ (mentre la sola condizione $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ non assicura la convergenza della serie).

(*B*) *Di una serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *si sa che* $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ *e che* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 11.$ *Allora:*

(B_1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 11$ $\boxed{\textit{VERO}}$ $\boxed{\textit{FALSO}}$ <u>*perché:*</u>

FALSO perché, visto che $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 11$, la serie converge, e dunque deve essere $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

(B_2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{11}$ $\boxed{\textit{VERO}}$ $\boxed{\textit{FALSO}}$ <u>*perché:*</u>

FALSO perché, come visto in *(B_1)*, si ha $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e dunque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$.

(B_3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ $\boxed{\textit{VERO}}$ $\boxed{\textit{FALSO}}$ <u>*perché:*</u>

VERO (si veda la spiegazione di *(B_1)*).

(B_4) *nessun termine della serie può essere maggiore di 11* $\boxed{\textit{VERO}}$ $\boxed{\textit{FALSO}}$ <u>*perché:*</u>

FALSO perché la serie potrebbe contenere termini negativi e termini maggiori di 11; si prenda, ad esempio, la serie $\displaystyle 12 - 12 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{10}{11}\right)^n$.