

Esame di (Analisi) Matematica I - 17 settembre 2007

A

**Esercizio 1**

(A) Definire che cosa è una primitiva di una funzione  $f(x)$  continua su un intervallo  $I$  e che cosa è l'integrale indefinito di  $f(x)$  su  $I$ .

(B) E' data la funzione

$$g(x) = \frac{\arctan(3x)}{5x^2}.$$

(B<sub>1</sub>) Trovare la primitiva di  $g(x)$  che si annulla per  $x = \frac{1}{3}$ .

♣ (B<sub>2</sub>) (solo per gli alunni della Terza Facoltà) Calcolare l'integrale improprio  $\int_{\frac{1}{3}}^{+\infty} g(x) dx$ .

**ESERCIZIO 2.** Si consideri la funzione  $f(x) = 3x\sqrt{4-x^2}$ . Si chiede di:

(a) determinare il dominio, il segno, gli zeri ed eventuali simmetrie della funzione  $f(x)$ , ;

(b) determinare gli intervalli di monotonia di  $f(x)$  e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e assoluto;

(c) tracciare il grafico di  $f(x)$  utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti;

(d) Enunciare il teorema di Rolle.

(e) Dire se la funzione  $f(x) = 3x\sqrt{4-x^2}$  soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle sull'intervallo  $I = [-2, 2]$ .

### Esercizio 3

E' data la funzione  $f(x) = 3x \ln(1 - 3x^2) - 4 \sin(3x) + 12x$ .

(a) Trovare lo sviluppo di MacLaurin di ordine 3 di  $f(x)$ ;

(b) provare che il punto  $x = 0$  è un punto di stazionarietà per  $f(x)$  e indicarne la natura (punto di massimo, minimo o flesso);

(c) utilizzando lo sviluppo trovato, calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$ .

♣ (d) (solo per gli alunni della Terza Facoltà) Dire se converge l'integrale improprio  $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^3 \sqrt{x}} dx$ .

◇ **Esercizio 4** (solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà)

In una scatola ci sono 36 lampadine da 100 Watt e 16 lampadine da 20 Watt, tutte distinte tra di loro.

Si sa che 8 lampadine da 100 Watt e 4 lampadine da 20 Watt sono difettose.

Vengono confezionate scatole contenenti 4 lampadine ciascuna.

Indicare **motivando opportunamente le risposte** in quanti modi diversi si può confezionare una scatola nelle seguenti circostanze:

a) se non si hanno restrizioni

b) se si considerano scatole contenenti 2 lampadine da 100 Watt non difettose e 2 lampadine da 20 Watt non difettose

c) se si vuole che le scatole contengano almeno una lampadina difettosa (di qualunque potenza)

d) se si vogliono scatole contenenti almeno una lampadina da 100 Watt difettosa.

♣ **Esercizio 5** (solo per gli alunni della Terza Facoltà)

(A) Definire che cosa significa che una serie numerica è convergente e indicare una condizione necessaria per la convergenza.

(B) Di una serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  si sa che  $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$  e che  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 11$ . Allora:

(B<sub>1</sub>)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 11$        VERO     FALSO      perché:

(B<sub>2</sub>)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{11}$        VERO     FALSO      perché:

(B<sub>3</sub>)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$        VERO     FALSO      perché:

(B<sub>4</sub>) nessun termine della serie può essere maggiore di 11       VERO     FALSO      perché: