Cognome Nome .... Matricola .... Laurea in ....

Esame di (Analisi) Matematica I - 17 novembre 2007 A

ESERCIZIO 1

E' data la funzione $f(x) = 4 + \ln(1 - 6x^2) - 4\sqrt{1 - 3x^2}$.

(a) Trovare lo sviluppo di MacLaurin di ordine 4 di $f(x)$.

(b) Utilizzando lo sviluppo trovato, provare che $f(x)$ ha segno costante in un intorno di $x = 0$ (e dire quale).

(c) Trovare il minimo valore di $n \in \mathbb{N}$ per cui $f^{(n)}(0) \neq 0$, e, per il valore di n trovato, dire quanto vale $f^{(n)}(0)$.

♣ (d) (*solo per gli alunni della Terza Facoltà*) Dire se converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x^4\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x$.

ESERCIZIO 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{4}{x} + 17 \arctan 4x$$

Si chiede di:

(a) determinare il dominio ed eventuali simmetrie della funzione $f(x)$

(b) trovare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti

(c) determinare la derivata prima di $f(x)$, gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e gli eventuali punti di massimo e minimo (locale e assoluto)

(d) tracciare il grafico di $f(x)$ utilizzando le informazioni ricavate nei punti precedenti

(e) Trovare l'insieme immagine di f

(f) SENZA FARE CALCOLI ALGEBRICI, ma sfruttando tutte le informazioni ottenute in precedenza, trovare (se esistono) i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'equazione $f(x) = k$ ammette due soluzioni.

(g) Calcolare l'area della regione di piano compresa tra il grafico di f e l'asse delle x , per $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$

ESERCIZIO 3.

A) Dare la definizione di continuità e di derivabilità per una funzione $f(x)$ in un punto x_0.

B) Data la funzione $$f(x) = \begin{cases} \sin(3x) & \text{se } x < 0 \\ 3x - x^2 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(B_1) disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$;

(B_2) provare che la funzione $f(x)$ è continua e derivabile su $\mathbb{R}$

(B_3) Provare che la funzione $f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange sull'intervallo $[1, 2]$ e trovare il punto di Lagrange relativo a f su tale intervallo.

$\diamondsuit$ **ESERCIZIO 4** (*solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà*)

Sono dati i nove simboli 1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Si vogliono formare con essi targhe simmetriche contenenti 10 simboli del tipo:

A B C D E E D C B A

Sapendo che ogni simbolo può comparire più di una volta (come ad esempio nella targa 5325775235), dire quante diverse targhe si possono formare nelle seguenti situazioni:

(a) se non ci sono ulteriori restrizioni;

(b) se le targhe devono iniziare con la cifra 3;

(c) se le targhe devono iniziare con la cifra 3 e si possono utilizzare solo cifre dispari.

♣ **ESERCIZIO 5** (*solo per gli alunni della Terza Facoltà*)

(A) Definire che cosa è una serie geometrica e discuterne la convergenza.

(B) E' data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \cos\frac{3\pi}{4}\right)^n$$

(B_1) Provare che è convergente e calcolarne la somma.

(B_2) Che cosa si può dire sulla convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (1 + \cos\alpha)^n$$

al variare dell'angolo α in $[0, 2\pi]$?

(B_3) Provare che non esiste nessun valore di α in $[0, 2\pi]$ per cui la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (1 + \cos\alpha)^n$ abbia per somma $S = \dfrac{1}{2}$.