Cognome Nome .... Matricola .... Laurea in ....

(Analisi) Matematica I - 12 marzo 2005 A

Esercizio 1

E' data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x+1}{x^3+x} & \text{per } x > 1 \end{cases} .$$

a) Calcolare l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione $f(x)$ e l'asse delle x, per $x \in [0, \sqrt{3}]$.

♣ *b*) (*solo per gli alunni della Terza Facoltà*)

Calcolare integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Esercizio 2
Si consideri la funzione

$$f(x) = \ 3x + 2x \log x.$$

$a)$ Trovare il dominio, gli zeri e il segno di f.

$b)$ Calcolarne i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.

$c)$ Calcolare la derivata prima, gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo o minimo di f.

$d)$ Calcolare la derivata seconda, gli intervalli di convessità e gli eventuali punti di flesso di f.

e) Disegnare un grafico qualitativo di f. In particolare, mettere in evidenza le tangenti nei punti estremi del dominio.

f) Enunciare il teorema di Lagrange.

g) Provare che alla funzione $f(x)$ è applicabile il teorema di Lagrange nell'intervallo $[1,\ e]$, e calcolare il valore di c per cui $f'(c) = \dfrac{f(e) - f(1)}{e - 1}$.

h) Trovare il polinomio di Taylor $T_2(x)$ di ordine 2 di $f(x)$ centrato nel punto $x_0 = 1$, e indicare una formula di approssimazione che collega $f(x)$ con $T_2(x)$ in un intorno del punto $x_0 = 1$.

♢ **Esercizio 3** (*solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà*)

Ad una gara di sci partecipano 36 concorrenti; i primi 3 salgono sul podio (e non ci sono possibili "ex-equo"). A chi si classifica tra il quarto e il decimo posto viene data una targa in rame.

a) Quanti possibili podi si possono formare?
(N.B.: *Due podi si considerano uguali se gli stessi concorrenti si classificano ai primi tre posti e nello stesso ordine; altrimenti si considerano diversi.)*

b) Una volta ssegnati i primi tre posti, quanti possibili gruppi di sciatori ricevono la targhetta di rame?

c) Tra i concorrenti ci sono 4 italiani e 6 francesi. Si sa che sul podio ci sarà sicuramente almeno un italiano e almeno un francese. Quanti sono in questo caso i possibili podi ?

♣ **Esercizio 4** (*solo per gli alunni della Terza Facoltà*)

Di una serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si sa che converge e che la somma vale $\frac{21}{5}$.

a) Dire (giustificando l'affermazione con opportune motivazioni teoriche) quanto vale il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

b) Dire (motivando la risposta) se la serie $\sum_{n=8}^{+\infty} a_n$ converge.

c) Provare che non c'è nessun a_n maggiore di $\frac{21}{5}$.

d) Provare che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n + \frac{1}{2^n}\right)$ converge e trovare quanto vale la sua somma.