

(Analisi) Matematica I - 10 settembre 2005

B

Esercizio 1

Data la funzione

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 5x + 6} - x \cos(x^2)$$

a) trovare la primitiva della funzione $f(x)$ che passa per il punto $P = \left(0, \ln \frac{3}{2}\right)$.

♣ b) (solo per gli alunni della Terza Facoltà) calcolare l'integrale improprio

$$\int_4^{+\infty} \frac{2}{x^2 - 5x + 6} dx.$$

Esercizio 2

Data la funzione

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$$

- (a) determinare il dominio di $f(x)$, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;
- (b) determinare la derivata della funzione $f(x)$, gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e gli eventuali punti di massimo e minimo di f ;

(c) tracciare il grafico di $f(x)$.

Esercizio 3

Si consideri la funzione $f(x) = 3 \sin x - \ln(1 + 3x) - \frac{9}{2}x^2$.

(a) determinare lo sviluppo di McLaurin arrestato al terzo ordine;

(b) dedurre da (a) che tipo di punto è per $f(x)$ il punto $x = 0$ (massimo o minimo relativo o punto di flesso).

Esercizio 4

(a) Dare la definizione di funzione continua in un punto del suo dominio.

(b) Enunciare la proprietà che collega la continuità con la derivabilità di una funzione in un punto interno al suo dominio.

(c) Date le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ e^x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 1+x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

tracciarne i grafici e stabilire se sono continue e/o derivabili in $[-1, 1]$.

◇ **Esercizio 5** (*solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà*)

Ad una gita scolastica partecipano 32 ragazzi di una stessa scuola, 16 maschi e 16 femmine. Essi devono essere alloggiati in 8 camere quaduple di uno stesso albergo.

Rispondere alle seguenti domande, **dando opportune spiegazioni per ogni risposta**:

a) in quanti modi possono essere sistemati, se non ci sono restrizioni?

b) in quanti modi possono essere sistemati, se Angela e Grazia (e solo queste due) non vogliono dormire nella stessa stanza?

c) in quanti modi possono essere sistemati, se i professori hanno deciso che i maschi e le femmine debbano dormire in stanze separate?

♣ **Esercizio 6** (solo per gli alunni della Terza Facoltà)

(A) Enunciare il criterio di Leibniz per la convergenza delle serie a termini di segno alterno.

(B) E' data una serie a termini strettamente positivi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, di cui si sa che è convergente.

Allora:

B_1) la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^2}$ è convergente VERO FALSO perché:

B_2) la successione $(a_n)_{n \geq 1}$ è infinitesima VERO FALSO perché:

B_3) la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ può essere divergente VERO FALSO perché: