

(Analisi) Matematica I - 10 settembre 2005

A

Esercizio 1

Data la funzione

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 4x + 3} + x \sin(x^2)$$

- a) trovare la primitiva della funzione $f(x)$ che passa per il punto $P = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

- ♣ b) (solo per gli alunni della Terza Facoltà) calcolare l'integrale improprio

$$\int_4^{+\infty} \frac{2}{x^2 - 4x + 3} dx.$$

Esercizio 2

Data la funzione

$$f(x) = \frac{2-x}{\sqrt{1+x}}$$

- (a) determinare il dominio di $f(x)$, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;
- (b) determinare la derivata della funzione $f(x)$, gli intervalli di monotonia di $f(x)$ e gli eventuali punti di massimo e minimo di f ;

(c) tracciare il grafico di $f(x)$.

Esercizio 3

Si consideri la funzione $f(x) = \ln(1 + 2x) - 2x \cos x + 2x^2$.

(a) determinare lo sviluppo di McLaurin arrestato al terzo ordine;

(b) dedurre da (a) che tipo di punto è per $f(x)$ il punto $x = 0$ (massimo o minimo relativo o punto di flesso).

Esercizio 4

- (a) Dare la definizione di funzione derivabile in un punto interno al suo dominio.
- (b) Enunciare la proprietà che collega la derivabilità con la continuità di una funzione in un punto interno al suo dominio.
- (c) Date le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ e^{-x} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ e^x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

tracciarne i grafici e stabilire se sono continue e/o derivabili in $[-1, 1]$.

◇ **Esercizio 5** (*solo per gli alunni della Prima e Quarta Facoltà*)

Ad una gita scolastica partecipano 24 ragazzi di una stessa classe, 12 maschi e 12 femmine. Essi devono essere alloggiati in 8 camere triple di uno stesso albergo.

Rispondere alle seguenti domande, **dando opportune spiegazioni per ogni risposta**:

a) in quanti modi possono essere sistemati, se non ci sono restrizioni?

b) in quanti modi possono essere sistemati, se Carlo e Andrea (e solo questi due) non vogliono dormire nella stessa stanza?

c) in quanti modi possono essere sistemati, se i professori hanno deciso che i maschi e le femmine debbano dormire in stanze separate?

♣ **Esercizio 6** (solo per gli alunni della Terza Facoltà)

(A) Enunciare il criterio del confronto per la convergenza delle serie a termini positivi.

(B) E' data una serie a termini strettamente positivi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, di cui si sa che è convergente.

Allora:

B_1) la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2n}$ è convergente VERO FALSO

B_2) la successione $(a_n)_{n \geq 1}$ è limitata VERO FALSO

B_3) la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ è convergente VERO FALSO