Esercizi e Temi di Esame Svolti

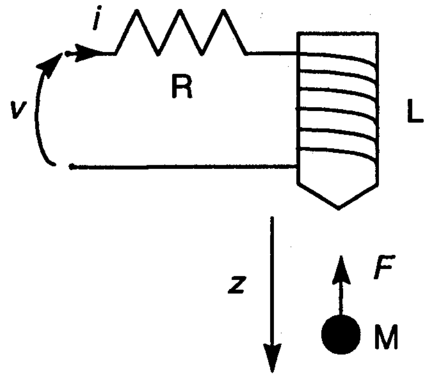
per i corsi di

Teoria dei Sistemi
— Diplomi Teledidattici —

A cura di Giuseppe Calafiore
Dipartimento di Automatica e Informatica
Politecnico di Torino.

TEORIA DEI SISTEMI – Ing. Informatica e Automatica – Consorzio Nettuno – Alessandria
Compito del 25-9-97

Esercizio 1
Nel sistema illustrato in figura:



la tensione del circuito elettrico $v(t)$ è l'ingresso e la posizione verticale $z(t)$ della pallina è l'uscita. Il legame tra la corrente i del circuito elettrico e la forza F che agisce sulla pallina è dato dall'espressione $F = K\frac{i^2}{z^2}$. I valori numerici dei parametri sono: $R = 0.2\ \Omega$, $L = 10^{-3}$ H, $K = 1.25 \cdot 10^{-5}$ Nm^{2}A^{-2}, $M = 2 \cdot 10^{-3}$ Kg, $g = 10$ ms^{-2}.

1. Scrivere il modello matematico del sistema (equazioni di stato).
2. Calcolare gli stati di equilibrio corrispondenti all'ingresso costante $V(t) = \overline{V} = 0.4$ V e studiarne la stabilità.

Esercizio 2
Dato il sistema lineare:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_3 &= -2x_3 + u \\ y &= 2x_1 \end{aligned}$$

Si supponga che $x(0) = 0$, $u(t) = 3\sin(4t)$, per $t \geq 0$. Quanto vale $y(t)$, per t "sufficientemente grande"?

Esercizio 3
Dato il sistema:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= 0.5x_1(k) + x_1(k)x_2(k) \\ x_2(k+1) &= -0.5x_2(k) + 3x_2^2(k) \end{aligned}$$

1. Trovare gli stati di equilibrio e discuterne la stabilità mediante il metodo della linearizzazione.
2. Per gli eventuali stati di equilibrio stabili verificare la stabilità mediante il criterio di Lyapunov usando come funzione $V(x) = ax_1^2 + bx_2^2$.

SOLUZIONI

Esercizio 1

Scegliamo come variabili di stato le corrente i e la posizione z e velocità $\dot{z}$ della pallina, quindi

$$x = \begin{bmatrix} i \\ z \\ \dot{z} \end{bmatrix}.$$

Dalla equazione alla maglia elettrica del circuito otteniamo l'equazione

$$v = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t},$$

mentre dalla legge di Newton applicata alla pallina otteniamo

$$Mg - F = M\ddot{z}.$$

Le equazioni precedenti sono facilmente riscrivibili nella forma di equazioni di stato come

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \tfrac{1}{L}(-Rx_1 + v) \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \tfrac{1}{M}(-K\tfrac{x_1^2}{x_2^2} + Mg). \end{aligned}$$

Per calcolare gli stati di equilibrio risolviamo il sistema di equazioni $\dot{x} = 0$. Dalla prima equazione si ottiene $\bar{x}_1 = \bar{v}/R$, dalla seconda si ottiene $\bar{x}_3 = 0$ e dalla terza $\bar{x}_2 = \sqrt{\frac{K}{Mg}}\bar{v}/R$, quindi

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{v}/R \\ \sqrt{\frac{K}{Mg}}\bar{v}/R \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Per la linearizzazione, notiamo che le prime due equazioni di stato sono già in forma lineare; per la terza equazione abbiamo

$$\left.\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right|_{eq.} = -\frac{2gR}{\bar{v}}; \quad \left.\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right|_{eq.} = \frac{2R}{\bar{v}}\sqrt{\frac{Mg^3}{K}}; \quad \left.\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right|_{eq.} = 0,$$

da cui si ricava la matrice A del sistema linearizzato

$$A = \begin{bmatrix} -R/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2gR}{\bar{v}} & \frac{2R}{\bar{v}}\sqrt{\frac{Mg^3}{K}} & 0 \end{bmatrix} = A = \begin{bmatrix} -200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & 400 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di tale matrice sono in $+20,\ -20,\ -200$, quindi il sistema linearizzato risulta instabile, quindi anche lo stato di equilibrio considerato è instabile.

Domanda aggiuntiva: Ragionando sul sistema linearizzato, progettare, se possibile, una retroazione sugli stati del tipo $\delta v = -Kx + r$ in modo da rendere stabile il sistema ed assegnare i poli in catena chiusa in $\lambda_1 = -10$ e $\lambda_{2,3}$ con smorzamento $\xi = 0.5$ e $\omega_n = 100$.
Soluzione: Il sistema linearizzato complessivo è descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} \dot{\delta x} &= A\delta x + B\delta v \\ \delta y &= C\delta x, \end{aligned}$$

dove $\delta x = x - \bar{x}$, $\delta y = z - \bar{x}_2$, $\delta v = v - \bar{v}$, e

$$A = \begin{bmatrix} -200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & 400 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Per prima cosa, verifichiamo la controllabilità del sistema. La matrice di controllabilità è

$$R = \begin{bmatrix} 1000 & -200000 & 40000000 \\ 0 & 0 & -10000 \\ 0 & -10000 & 2000000 \end{bmatrix},$$

il cui rango è tre, quindi il sistema è completamente controllabile e, di conseguenza, tutti gli autovalori in catena chiusa sono assegnabili a piacimento tramite una retroazione sugli stati del tipo $\delta v = -Kx+r$. Il guadagno (vettoriale) K è calcolabile tramite i comandi Matlab `acker` e/o `place` (per l'uso, si vedano i relativi help in linea). Stabilito il vettore P che contiene gli autovalori desiderati in catena chiusa (nel nostro caso $P = [-10; \ \ -50 - \jmath 86.6025; \ \ -50 + \jmath 86.6025]$), tramite il comando `place(A,B,P)` otteniamo

$$K = [-0.0900; \ \ -14.4000; \ \ -1.1400].$$

Per la verifica del risultato, consideriamo la matrice del sistema in catena chiusa $A_{cc} = A - BK$

$$A_{cc} = 1.0e + 004 \begin{bmatrix} -0.0110 & 1.4400 & 0.1140 \\ 0 & 0 & 0.0001 \\ -0.0010 & 0.0400 & 0 \end{bmatrix},$$

i cui autovalori (calcolati ad esempio tramite il comando `eig` di Matlab) risultano esattamente nelle posizioni specificate dal vettore P.

Esercizio 2

Il sistema in oggetto può essere espresso in forma standard matriciale

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

con
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
La funzione di trasferimento $F(s)$ del sistema si ricava quindi utilizzando la formula
$$F(s) = C(sI - A)^{-1}B = 4\frac{s-1}{s^3 - 11s - 14},$$
oppure direttamente tramite il comando Matlab `[num,den]=ss2tf(A,B,C,0)`. Le radici del denominatore di $F(s)$ (poli) sono in 3.8284; -1.8284; -2, quindi il sistema risulta instabile e la sua risposta a regime tende a infinito.

Esercizio 3

Calcoliamo gli stati di equilibrio, imponendo che $x(k+1) = x(k)$. Si ottiene il seguente sistema di equazioni
$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= 0.5\bar{x}_1 + \bar{x}_1\bar{x}_2 \\ \bar{x}_2 &= -0.5\bar{x}_2 + 3\bar{x}_2^2, \end{aligned}$$
che ammette come soluzioni i due punti di equilibrio seguenti
$$\bar{x}^I = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{x}^{II} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/6 \end{bmatrix}.$$
Il sistema linearizzato ha una matrice di stato data da
$$A = \begin{bmatrix} 0.5 + x_2 & x_1 \\ 0 & -0.5 + 6x_2 \end{bmatrix},$$
che, valutata nei due punti di equilibrio trovati, fornisce
$$A^I = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}; \quad A^{II} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & -3/2 \end{bmatrix}.$$
La matrice A^I ha tutti gli autovalori con modulo minore di uno, quindi lo stato di equilibrio $\bar{x}^I$ è asintoticamente stabile. La matrice A^{II} ha un autovalore con modulo maggiore di uno, quindi lo stato di equilibrio $\bar{x}^{II}$ è instabile.

Verifichiamo la asintotica stabilità di $\bar{x}^I$ anche con il metodo di Lyapunov, utilizzando la funzione di Lyapunov suggerita nel testo $V(x) = ax_1^2 + bx_2^2$. Costruiamo la funzione $\Delta V(x) = V(x(k+1)) - V(x(k))$, risulta
$$\Delta V(x) = a(0.5x_1 + x_1x_2)^2 + b(-0.5x_2 + 3x_2^2)^2 - ax_1^2 - bx_2^2 =$$
$$ax_1^2(x_2^2 + x_2 - 3/4) + 3bx_2^2(3x_2^2 - x_2 - 1/4).$$
Per $a > 0, b > 0$ notiamo che esiste un intorno dello stato di equilibrio (l'origine, in questo caso) in cui $V(x)$ è positiva e $\Delta V(x)$ è negativa, infatti le due espressioni tra parentesi nella equazione precedente si annullano rispettivamente in -1.5; 0.5 e $-1/6$; 0.5 e sono negative all'interno di tali intervalli.

Teoria dei Sistemi
— Diploma Teledidattico —

ESERCIZIO 1
Si consideri il seguente sistema lineare a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Sia $a = 1$. Conoscendo i seguenti valori degli ingressi e delle uscite: $u(0) = 1$, $u(1) = 1$, $y(0) = 2$, $y(1) = 4.25$, $y(2) = 6.25$, è possibile determinare univocamente il valore dello stato iniziale $x(0)$ del sistema? Se si, calcolare $x(0)$.
2. Come al punto precedente, ma con $a = 0$.

ESERCIZIO 2
Dato il sistema lineare a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -10 & -100 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t); \quad x(0) = 0 \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

1. Determinare la funzione di trasferimento del sistema tra u e y.
2. Tracciare i diagrammi di Bode asintotici (approssimati) di modulo e fase della funzione di trasferimento determinata al punto precedente. Commentare il procedimento.

ESERCIZIO 3
Un sistema a tempo discreto, descritto dalle matrici A, B e C, è controllato tramite la legge $u(k) = K \cdot x(k) + r(k)$. Si calcoli la funzione di trasferimento $M(z) = \frac{Y(z)}{R(z)}$ e la funzione $N(z)$ che lega le condizioni iniziali $x(0)$ all'uscita del sistema in catena chiusa.

SOLUZIONI

Esercizio 1

Risolvendo ricorsivamente le equazioni costitutive del sistema e riorganizzando i risultati in forma matriciale, si ottiene

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^k \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ CA^{k-1}B & \cdots & \cdots & \cdots & CB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix}.$$

Nel caso particolare del problema in oggetto si ha

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ CB & 0 \\ CAB & CB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{bmatrix},$$

che riscriviamo come

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \end{bmatrix} = K_o x(0) + U \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{bmatrix},$$

essendo K_o la matrice di osservabilità del sistema.

1. Nel caso $a = 1$ si ha

$$K_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0.25 & 1 & 1 \\ 0.25 & 0.25 & 2.25 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1.5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4.25 \\ 6.25 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si ottiene quindi

$$K_o x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.25 \\ 2.75 \end{bmatrix}.$$

Essendo la matrice K_o a rango pieno (sistema completamente osservabile), essa è invertibile e $x(0)$ può essere univocamente determinato come

$$x(0) = K_o^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2.25 \\ 2.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Se $a = 0$ si ha

$$K_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matrice di osservabilità ha rango 2, quindi il sistema non è completamente osservabile e lo stato iniziale $x(0)$ non è determinabile *univocamente*. N.B.: Si noti che il fatto che K_o sia singolare non implica automaticamente che non esista una soluzione per $x(0)$, ma solo che tale soluzione, se anche esiste, non è unica (nel problema in oggetto, non esiste nessuna soluzione per $x(0)$. Perchè?).

Esercizio 2 La funzione di trasferimento tra u ed y è data da $M(s) = C(sI - A)^{-1}B$, dove

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+10 & 100 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 10s + 100} \begin{bmatrix} s & -100 \\ 1 & s+10 \end{bmatrix},$$

dalla quale si ottiene

$$M(s) = \frac{s-1}{s^2 + 10s + 100}.$$

Diagrammi di Bode di $M(s)$:
Guadagno stazionario: $K_{st} = -\frac{1}{100} \Rightarrow |K_{st}| = -40\,\text{dB}, \ \angle K_{st} = 180^o$.
Poli: $p_{1,2} = -5 \pm j8.66 \Rightarrow \omega_n = 10, \ \xi = 0.5, \ M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = 1.15 = 1.25\,\text{dB}$.
Zeri: $z = +1$! zero a DX.
Fase: iniziale:180^o (dovuta alla fase di K_{st}); finale:-90^o.

Esercizio 3
Scriviamo dapprima le equazioni di stato del sistema in catena chiusa: $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$, dove $u(k) = Kx(k) + r(k)$, quindi il sistema controllato è retto dalle equazioni

$$\begin{array}{lcl} x(k+1) & = & A_{cc}x(k) + Br(k) \\ y(k) & = & Cx(k) \end{array},$$

dove $A_{cc} = A + BK$. Il sistema controllato è dunque descritto dalla tripla (A_{cc}, B, C) e dallo stato iniziale x_0. Considerando la trasformata-Z dell'equazione di stato, si ha

$$zx(z) - zx_0 = A_{cc}x(z) + BR(z).$$

Risolvendo per $x(z)$ e considerando anche l'equazione di uscita, si ha

$$Y(z) = M(z)\,R(z) + N(z)\,x_0 = C(zI - A_{cc})^{-1}B\,R(z) \ + \ zC(zI - A_{cc})^{-1}\,x_0.$$

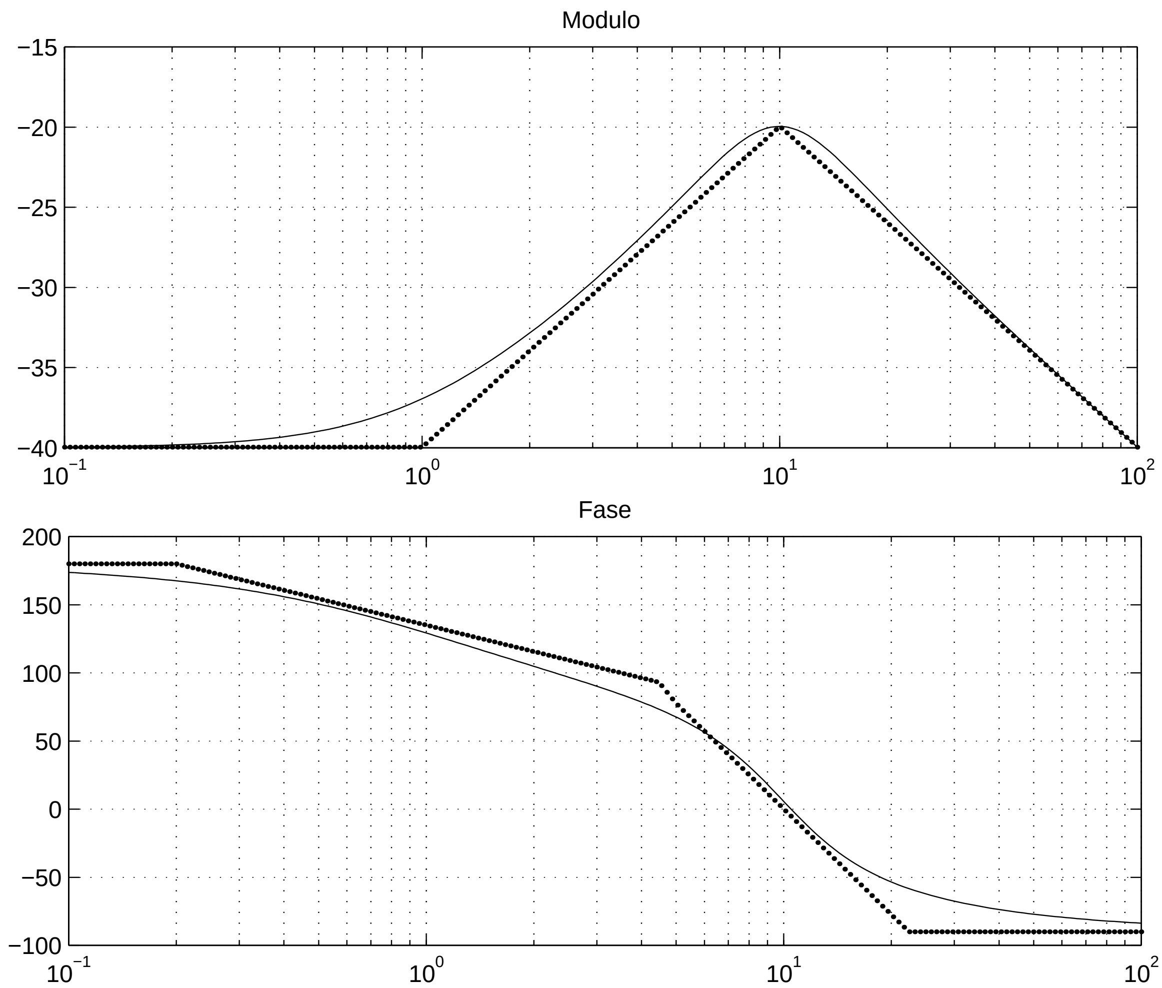
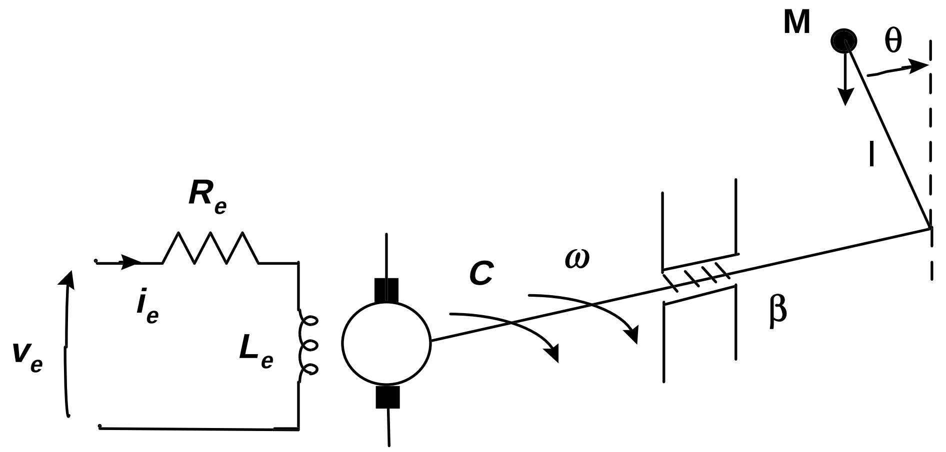


Figure 1: Diagrammi di Bode esatti ed asintotici relativi all'esercizio 2.

TEORIA DEI SISTEMI
Ing. Informatica - Consorzio Nettuno - Alessandria

Compito del 23-9-98

Esercizio 1
Nel sistema illustrato in figura la tensione $v_e(t)$ è l'ingresso e l'angolo $\theta(t)$ è l'uscita.



1. Scrivere le equazioni di ingresso-stato-uscita ricordando che $C=K_e\, i_e$
2. Calcolare gli stati di equilibrio corrispondenti ai due valori di ingresso costante $\bar{v}_e$ =20 V e $\bar{v}_e$ =14.142 V e studiarne la stabilità, mediante il metodo della linearizzazione, utilizzando i seguenti valori numerici dei parametri:
   R_e=10 Ω, L_e=0.1 H, K_e=9.81 Nm/A, β=0.2 Nm s/rad, M=2 Kg, l=1 m, g=9.81 m/s^2

Esercizio 2
Dato il sistema lineare:

$$\dot{x}_1(t) = 6x_1(t) - 4x_2(t) + 2u(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = 24x_1(t) - 16x_2(t)$$
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Si determini la funzione di trasferimento $G(s)=Y(s)/U(s)$ e l'andamento nel tempo dell'uscita per un gradino unitario d'ingresso.

Esercizio 3
Dato il sistema non lineare:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1(4x_1^2 + x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_2(4x_1^2 + x_2^2)$$

1. Trovare gli stati di equilibrio e discuterne la stabilità mediante il metodo della linearizzazione.
2. Per gli eventuali stati di equilibrio asintoticamente stabili, verificare la stabilità mediante il criterio di Lyapunov. (Se utile: $V(x) = a(x_1 - c)^2 + b(x_2 - d)^2$)

Teoria dei Sistemi Teledid.
Soluzione Compito del 23-9-98

ESERCIZIO 1
Equazioni del sistema:

$$\begin{aligned} L_e \frac{di_e}{dt} &= V_e - R_e i_e \\ C - \beta\omega - Mgl\sin\theta &= Ml^2 \frac{d\omega}{dt}, \end{aligned}$$

dove $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$. Scelgo come stati $x_1 = i_e$, $x_2 = \theta$, $x_3 = \omega$; ingresso $u = v_e$, uscita $y = \theta$. Scrivo allora le equazioni (non lineari) di stato per il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\tfrac{R_e}{L_e} x_1 + \tfrac{1}{L_e} u \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \tfrac{K_e}{Ml^2} x_1 - \tfrac{g}{l}\sin x_2 - \tfrac{\beta}{Ml^2} x_3; \\ y &= [0 \;\; 1 \;\; 0]x. \end{aligned}$$

Ricerchiamo ora i punti di equilibrio per ingresso costante $u = \bar{u}$, imponendo la condizione $\dot{x} = 0$. Otteniamo

$$\begin{aligned} &\bar{x}_1 = \tfrac{\bar{u}}{L_e}, \\ &\sin\bar{x}_2 = \tfrac{K_e \bar{u}}{MlgR_e} = \tfrac{\bar{u}}{20}, \\ &\bar{x}_3 = 0. \end{aligned}$$

Per il valore $\bar{u} = 20$ abbiamo quindi lo stato di equilibrio seguente

$$\bar{x}_a = \begin{bmatrix} 2 \\ 90 \\ 0 \end{bmatrix},$$

mentre per $\bar{u} = 14.142$ abbiamo due distinti stati di equilibrio, corrispondenti alle due soluzioni di $\sin\bar{x}_2 = 1/\sqrt{2}$:

$$\bar{x}_b = \begin{bmatrix} 1.4142 \\ 45 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{x}_c = \begin{bmatrix} 1.4142 \\ 135 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Studiamo ora la stabilità dei precedenti stati di equilibrio tramite il metodo di linearizzazione. la matrice A del sistema linearizzato è data da

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_e}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_e}{Ml^2} & -\frac{g}{l}\cos\bar{x}_2 & -\frac{\beta}{Ml^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4.905 & -9.81\cos\bar{x}_2 & -0.1 \end{bmatrix}.$$

La matrice A è diagonale a blocchi, per cui un autovalore è pari a $\lambda_1 = -100$, mentre i rimanenti due autovalori sono dati dalle radici di $\lambda^2 + 0.1\lambda + 9.81\cos\bar{x}_2$. Per i tre stati di equilibrio si ottiene quindi (ricordando che $\cos 45 = 1/\sqrt{2}$ e che $\cos 135 = -1/\sqrt{2}$):

a. $\lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -0.1$
b. $\lambda_2 = -0.05 + 2.63j,\ \lambda_3 = -0.05 - 2.63j$
c. $\lambda_2 = -2.6842,\ \lambda_3 = 2.5842.$

Nel caso a. non si può concludere nulla sulla stabilità del punto di equilibrio, poiché è presente una radice con parte reale nulla (occorrerebbe ricorrere ad un altro metodo per la verifica della stabilità, ad es. Lyapunov). Nel caso b. il sistema linearizzato è asintoticamente stabile, quindi anche il punto di equilibrio è asintoticamente stabile. Nel caso c. il sistema linearizzato è instabile, quindi anche il punto di equilibrio è instabile.

ESERCIZIO 2

Riscriviamo il sistema in forma matriciale

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 24 & -16 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ \ 1]x, \end{aligned}$$

la funzione di trasferimento del sistema si determina quindi applicando la formula

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

da cui si ottiene

$$G(s) = 2\frac{s+40}{s(s+10)}.$$

Se l'ingresso è un gradino di ampiezza unitaria, allora $U(s) = 1/s$ e

$$Y(s) = 2\frac{s+40}{s^2(s+10)}.$$

Calcoliamo la decomposizione in fratti semplici di $Y(s)$ come

$$Y(s) = \frac{R_{1,1}}{s} + \frac{R_{1,2}}{s^2} + \frac{R_2}{s+10},$$

dove $R_{1,1} = -.6, R_{1,2} = 8, R_2 = .6$. Quindi antitrasformando ogni termine elementare ed applicando la proprietà di linearità, otteniamo

$$y(t) = -.6 + 8t + .6e^{-10t}, \quad t \geq 0.$$

ESERCIZIO 3

Gli stati di equilibrio si determinano ponendo $\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0$; risulta pertanto il seguente sistema

$$\begin{array}{c} \bar{x}_1(4\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - 1) = 0 \\ \bar{x}_2(4\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - 1) = 0. \end{array}$$

Le soluzioni di questo sistema sono date dal punto

$$\bar{x}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e dall'insieme di punti che soddisfano l'equazione

$$\bar{x}_b : \quad 4\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - 1 = 0.$$

Tale equazione rappresenta una ellisse nel piano di stato (x_1, x_2), con centro nell'origine, semiasse orizzontale lungo 2 e semiasse verticale lungo 1.

Studiamo ora la stabilità degli stati di equilibrio utilizzando il metodo per linearizzazione. La matrice A del sistema linearizzato risulta

$$A = \begin{bmatrix} 12\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - 1 & 2\bar{x}_1\bar{x}_2 \\ 8\bar{x}_1\bar{x}_2 & 4\bar{x}_1^2 + 3\bar{x}_2^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Per il punto $\bar{x}_b$ si ha

$$A_a = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

i cui autovalori sono ovviamente $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$ ed hanno entrambi parte reale strettamente negativa, quindi il punto di equilibrio è asintoticamente stabile.

Per i punti $\bar{x}_b$ sulla ellisse si ha

$$A_b = \begin{bmatrix} 8\bar{x}_1^2 & 2\bar{x}_1\bar{x}_2 \\ 8\bar{x}_1\bar{x}_2 & 2\bar{x}_2^2 + 1 \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\begin{array}{c} \lambda^2 - 2\lambda(4\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) + 16\bar{x}_1^2\bar{x}_2^2 - 16\bar{x}_1^2\bar{x}_2^2 = \\ \lambda(\lambda - 8\bar{x}_1^2 - 2\bar{x}_2^2) = \lambda(\lambda - 2). \end{array}$$

Gli autovalori sono in $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$, quindi il sistema linearizzato è instabile e di conseguenza tutti i punti di equilibrio di tipo "b" sono instabili.

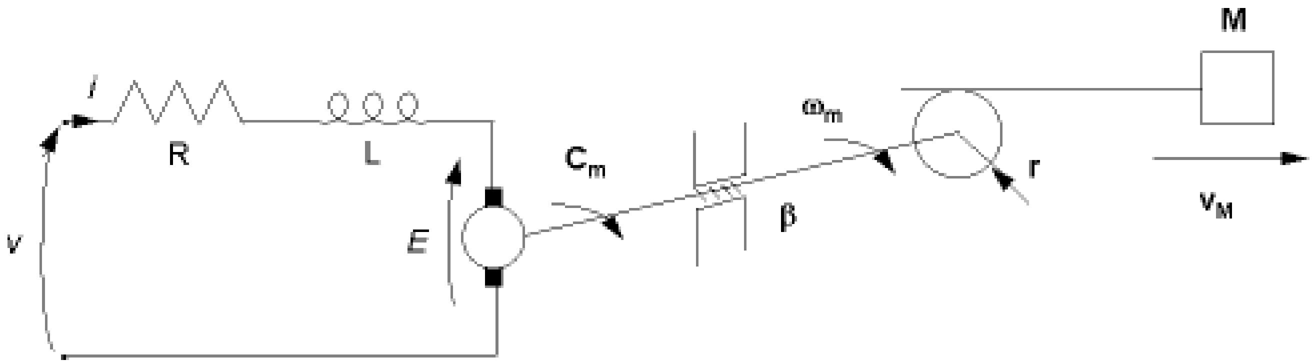
Verifichiamo ora la stabilità del punto $\bar{x}_a$ utilizzando il metodo diretto di Lyapunov. Consideriamo innanzitutto che per essere $V(0) = 0$ dobbiamo porre subito $c = 0, d = 0$. Inoltre, siccome $V(x)$ deve essere definita positiva in un intorno dell'origine, dovrà essere $a > 0, b > 0$. Calcoliamo quindi $\dot{V}(x)$:

$$\dot{V}(x) = [2ax_1 \;\; 2bx_2] \left[\begin{array}{c} x_1(4x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ x_2(4x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{array} \right] = (2ax_1^2 + 2bx_2^2)(4x_1^2 + x_2^2 - 1).$$

Il secondo termine del precedente prodotto è negativo all'interno dell'ellissoide di cui sopra, mentre il primo termine è sempre positivo, di conseguenza $\dot{V}(x)$ è definita negativa ed il punto di equilibrio considerato è asintoticamente stabile.

ESERCIZIO 1

Nel sistema illustrato in figura la tensione $v(t)$ è l'ingresso e la velocità angolare $\omega_m(t)$ è l'uscita.



I valori numerici dei componenti sono: $R = 10\ \Omega$, $L = 1$ H, $K_E = K_C = 20$ NmA^{-1}, $\beta = 2$ Nm s/rad, $M = 25$ Kg, $r = 0.2$ m. Si ricorda che $E = K_E\omega_m$, $C_m = K_C i$, $v_M = r\,\omega_m$.

1. Scrivere il modello matematico del sistema (equazioni di stato).
2. Determinare la funzione di trasferimento tra l'ingresso e l'uscita e tracciarne i diagrammi di Bode di modulo e fase.
3. Sia $v(t) = V \sin \omega t$, $t > 0$ e siano nulle le condizioni iniziali. Quanto deve valere V al massimo perché, per t "sufficientemente grandi", $|\omega_m(t)| \leq 1$, $\forall\omega$.
4. Sia $v(t) = 0$, $t > 0$, e siano $i(0) = 2$ A, $\omega_m(0) = 150$ rad/s, quanto vale $\omega_m(t)$, $\forall t > 0$?

ESERCIZIO 2

Dato il sistema:

$$x_1(k+1) = x_1(k)\,[4x_1^2(k) + 3x_2^2(k)]$$
$$x_2(k+1) = x_2(k)\,[4x_1^2(k) + 3x_2^2(k)]$$

1. Trovare gli stati di equilibrio.
2. Discutere la stabilità degli eventuali stati di equilibrio mediante il metodo della linearizzazione.
3. Per gli eventuali stati di equilibrio asintoticamente stabili verificare la stabilità mediante il criterio di Lyapunov. (Suggerimento: provare ad usare $V(x) = ax_1^2 + bx_2^2$)

SOLUZIONE Compito 27-10-95

ESERCIZIO 1

Punto 1.

Equazioni del sistema:

$$v = Ri + L\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}t} + K_E\omega_m$$

$$K_C i = \beta\omega_m + M\,r^2\frac{\mathrm{d}\,\omega_m}{\mathrm{d}t}$$

Da cui le equazioni di stato:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}t} &= -\tfrac{R}{L}i - \tfrac{K_E}{L}\omega_m + \tfrac{1}{L}v \\ \frac{\mathrm{d}\,\omega_m}{\mathrm{d}t} &= \tfrac{K_C}{Mr^2}i - \tfrac{\beta}{Mr^2}\omega_m\end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}t} &= -10i - 20\omega_m + v \\ \frac{\mathrm{d}\,\omega_m}{\mathrm{d}t} &= 20i - 2\omega_m\end{aligned}$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}\,\omega_m}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -20 \\ 20 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v$$

$$\omega_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \omega_m \end{bmatrix}$$

Punto 2.

La funzione di trasferimento $G(s)$ vale:

$$G(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+10 & 20 \\ -20 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{(s+10)(s+2)+400} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & -20 \\ 20 & s+10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \tfrac{20}{s^2+12s+420}$$

La f.d.t. ha due poli, $p_{1,2}$, complessi coniugati, con $\omega_n = \sqrt{420} \cong 20.49$ e $\zeta = \frac{12}{2\omega_n} \cong 0.29$.

Inoltre $\lim_{s\to 0} G(s) = \frac{20}{420} \cong 0.0476 \cong -26$ dB; i poli complessi coniugati hanno smorzamento minore di $1/\sqrt{2}$ e quindi si ha un picco di risonanza in $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \cong 18.68$, di ampiezza $M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \cong 1.80 \cong 5$ dB. Il valore massimo del modulo di $G(s)$ è uguale al valore del picco di risonanza moltiplicato per il valore per $s \to 0$ del diagramma di modulo: $\max_{\omega} |G(j\omega)| \cong 0.0476 \cdot 1.8 = 0.085 \cong -21$ dB.

I diagrammi di Bode di modulo e fase sono rappresentati in figura 1.

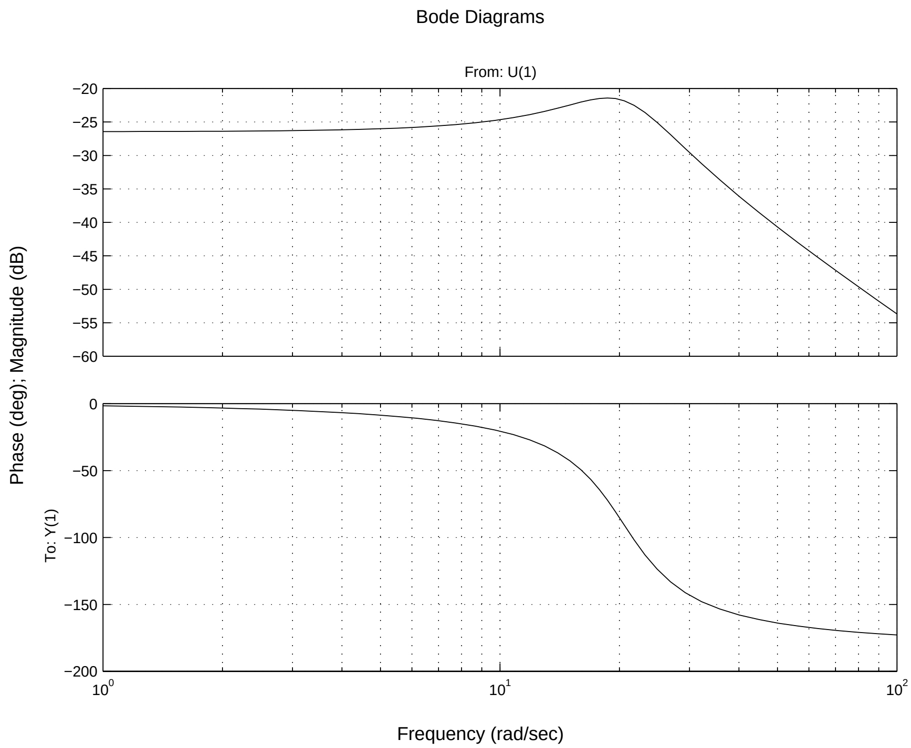


Figure 1: Diagramma di Bode

Punto 3.

Essendo il sistema asintoticamente stabile (i poli della funzione di trasferimento hanno parte reale strettamente negativa) il transitorio si estingue, e quindi a regime l'uscita è data dalla risposta in frequenza $G(j\omega)$:

$$\omega_m(t) = V\,|G(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi)$$

Il massimo valore dell'uscita sarà quindi dato dalla massima ampiezza della sinusoide in uscita:

$$\max_{\omega} |\omega_m(t)| = V \max_{\omega} |G(j\omega)| \leq 1 \Rightarrow V \leq \frac{1}{\max_{\omega} |G(j\omega)|} \cong \frac{1}{0.085} \cong 11.76$$

Punto 4.
Si ha

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}\,i(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}\,\omega_m(t)}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} i\,(t) \\ \omega_m\,(t) \end{bmatrix} + B\;v\,(t)$$

$$\omega_m(t) = C\;\begin{bmatrix} i\,(t) \\ \omega_m\,(t) \end{bmatrix}$$

Quindi, essendo $v\,(t) = 0$, $\forall t > 0$, usando le trasformate di Laplace, si ottiene (ponendo $I_0 = i\,(t)|_{t=0}$ e $\Omega_0 = \omega_m\,(t)|_{t=0}$)

$$s \begin{bmatrix} I\,(s) \\ \Omega_m\,(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_0 \\ \Omega_0 \end{bmatrix} = A\;\begin{bmatrix} I\,(s) \\ \Omega_m\,(s) \end{bmatrix}$$

$$\Omega_m(s) = C\;\begin{bmatrix} I\,(s) \\ \Omega_m\,(s) \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\Omega_m(s) = C\,(sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} I_0 \\ \Omega_0 \end{bmatrix}$$

con

$$\Omega_m(s) = \tfrac{1}{s^2+12s+420} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & -20 \\ 20 & s+10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 150 \end{bmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{s^2+12s+420} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2s - 2996 \\ 150s + 1540 \end{bmatrix} = \tfrac{150s+1540}{s^2+12s+420} =$$

$$= 150\tfrac{s+10.27}{(s+6)^2+19.6^2}$$

Antitrasformando si ha

$$\omega_m(t) = \tfrac{\sqrt{(10.27-6)^2+19.6^2}}{19.6}\mathrm{e}^{-6t} \sin\left(19.6t + \arctan\left(\tfrac{19.6}{10.27-6}\right)\right) =$$

$$= 1.023\mathrm{e}^{-6t} \sin\left(19.6t + 1.356\right)$$

ESERCIZIO 2

Per determinare gli stati di equilibrio del sistema non lineare a tempo discreto dato, imponiamo la condizione $x(k+1) = x(k) = \bar{x}$, quindi

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \bar{x}_1(4\bar{x}_1^2 + 3\bar{x}_2^2) \\ \bar{x}_2 &= \bar{x}_2(4\bar{x}_1^2 + 3\bar{x}_2^2), \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned}\bar{x}_1(4\bar{x}_1^2 + 3\bar{x}_2^2 - 1) = 0\\ \bar{x}_2(4\bar{x}_1^2 + 3\bar{x}_2^2 - 1) = 0.\end{aligned}$$

Le soluzioni di questo sistema sono date dal punto

$$\bar{x}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e dall'insieme di punti che soddisfano l'equazione

$$\bar{x}_b : \quad 4\bar{x}_1^2 + 3\bar{x}_2^2 - 1 = 0.$$

Tale equazione rappresenta una ellisse nel piano di stato (x_1, x_2). Si ricorda in particolare che una equazione del tipo

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

rappresenta un ellisse con centro (x_0, y_0), assi paralleli agli assi coordinati e semi-assi di lunghezza pari ad a e b.

Studiamo ora la stabilità degli stati di equilibrio utilizzando il metodo per linearizzazione. La matrice A del sistema linearizzato risulta

$$A = \begin{bmatrix} 12\bar{x}_1^2 + 3\bar{x}_2^2 & 6\bar{x}_1\bar{x}_2 \\ 8\bar{x}_1\bar{x}_2 & 4\bar{x}_1^2 + 9\bar{x}_2^2 \end{bmatrix}.$$

Per il punto $\bar{x}_b$ si ha

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

i cui autovalori sono ovviamente $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ ed hanno entrambi modulo strettamente minore di uno, $|\lambda_{1,2}| < 1$, quindi il punto di equilibrio è asintoticamente stabile.

Per i punti $\bar{x}_b$ sulla ellisse si ha

$$A_b = \begin{bmatrix} 8\bar{x}_1^2 + 1 & 6\bar{x}_1\bar{x}_2 \\ 8\bar{x}_1\bar{x}_2 & 6\bar{x}_2^2 + 1 \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\begin{aligned}&(8\bar{x}_1^2 + 1 - \lambda)(6\bar{x}_2^2 + 1 - \lambda) - 48\bar{x}_1^2\bar{x}_2^2 =\\ &\quad \lambda^2 - 2\lambda(4\bar{x}_1^2 + 3\bar{x}_2^2 + 1) + 48\bar{x}_1^2\bar{x}_2^2 + 8\bar{x}_1^2 + 6\bar{x}_2^2 + 1 - 48\bar{x}_1^2\bar{x}_2^2 =\\ &\quad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3).\end{aligned}$$

Gli autovalori sono quindi in $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$. Si ha che $|\lambda_2| > 1$ quindi il sistema linearizzato è instabile e di conseguenza tutti i punti di equilibrio di tipo "b" sono instabili.

Verifichiamo ora la asintotica stabilità del punto $\bar{x}_a$ utilizzando il metodo di Lyapunov. Consideriamo la funzione di Lyapunov consigliata

$$V(x) = ax_1^2 + bx_2^2.$$

Trattandosi di un sistema a tempo discreto, occorre valutare la $\Delta V(x)$:

$$\Delta V(x) \doteq V(x(k+1)) - V(x(k)).$$

Nel caso in esame si ha:

$$\begin{aligned}\Delta V(x) = ax_1^2(4x_1^2 + 3x_2^2)^2 + bx_2^2(4x_1^2 + 3x_2^2)^2 - ax_1^2 - bx_2^2 = \\ ax_1^2((4x_1^2 + 3x_2^2)^2 - 1)^2 + bx_2^2((4x_1^2 + 3x_2^2)^2 - 1)^2 = \\ (ax_1^2 + bx_2^2)((4x_1^2 + 3x_2^2)^2 - 1)^2.\end{aligned}$$

Se $a > 0, b > 0$ abbiamo che $\Delta V < 0$ se

$$((4x_1^2 + 3x_2^2)^2 - 1)^2 < 0,$$

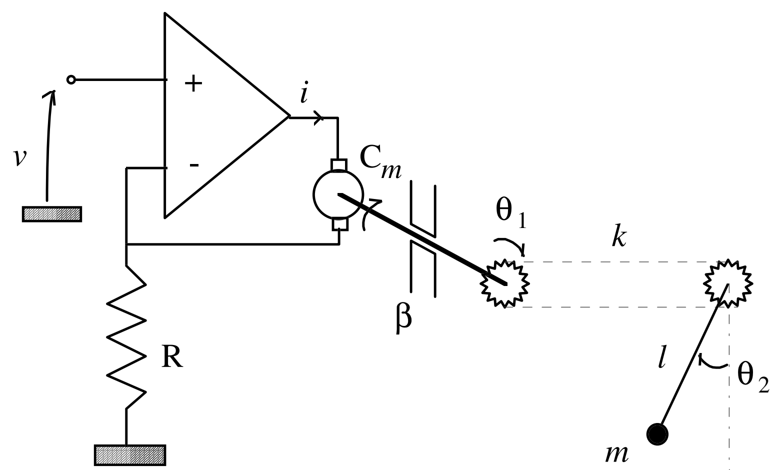
cioè se

$$4x_1^2 + 3x_2^2 < 1,$$

cioè per tutti i punti all'interno dell'ellissoide di cui si è trattato in precedenza.

Teoria dei Sistemi
— Diploma Teledidattico —

ESERCIZIO 1
Nel sistema rappresentato in figura l'ingresso è fornito dalla tensione $v(t)$ e l'uscita è data dalla posizione angolare $\theta_2(t)$. Il motore fornisce una coppia motrice $C_m(t) = k_m i(t)$, dove $k_m = 2\,\mathrm{Nm/A}$, e la corrente di armatura fornita dall'amplificatore operazionale è data da $i(t) = v(t)/R$. Sull'albero motore è presente attrito viscoso avente coefficiente $\beta = 10\,\mathrm{Nms/rad}$. Le ruote sono entrambe di raggio pari a $r = 0.1\,\mathrm{m}$ e la cinghia di trasmissione si comporta come un elemento elastico di costante $k = 10\,\mathrm{Nm/rad}$. L'asta a cui è sospesa la massa $m = 1\,\mathrm{Kg}$ è rigida, di massa trascurabile e lunghezza $l = 1\,\mathrm{m}$. Si consideri trascurabile l'inerzia dell'albero motore, $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, $R = 2\,\Omega$.



1. Scegliendo come variabili di stato $x_1 = \theta_1$, $x_2 = \theta_2$, $x_3 = \dot{\theta}_2$, si determinino le equazioni in variabili di stato del sistema.

2. Determinare un ingresso costante $v = \bar{v}$ tale che il sistema abbia un punto di equilibrio con $\theta_2 = -\pi/2$. Discutere la stabilità del punto di equilibrio eventualmente trovato.

ESERCIZIO 2
Si consideri il seguente sistema lineare a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Sia $a = 1$. È possibile costruire una legge di controllo $u(t) = Kx(t) + r(t)$ in modo da ottenere un sistema controllato con autovalori $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2$? Se si, calcolare K.

2. Come al punto precedente, ma con $a = 0$.

ESERCIZIO 3

Un sistema lineare a tempo continuo è descritto da una funzione di trasferimento il cui denominatore ha coefficienti con segno discorde (cioè sia maggiori che minori di zero). Il sistema è esternamente stabile? (Commentare e motivare la risposta).

SOLUZIONI

Esercizio 1

La corrente di armatura i è fornita dal testo come $i = v/R$, quindi la coppia motrice è data da $C_m = \frac{k_m}{R} v$. La cinghia di trasmissione si comporta come una molla torsionale di costante elastica k. Detta $C = k(\theta_2 - \theta_1)$ la coppia di interazione dovuta alla cinghia, scriviamo le seguenti due equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} C_m - \beta\dot{\theta}_1 + C &= 0; \quad \text{equilibrio albero motore} \\ -C - mgl\sin\theta_2 &= ml^2\ddot{\theta}_2; \quad \text{equilibrio asta.} \end{aligned}$$

1. Utilizzando le variabili di stato indicate nel testo si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{\beta}(-kx_1 + kx_2 + \frac{k_m}{R} v) \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{ml^2}(kx_1 - kx_2 - mgl\sin x_2) \end{aligned}$$

da cui, sostituendo i valori numerici forniti dei parametri:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 + 0.1v \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= 10x_1 - 10x_2 - 10\sin x_2 \end{aligned}$$

2. Imponiamo le condizioni di equilibrio $\dot{x}_i = 0$ per $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 0.1v &= 0 \qquad (1) \\ x_3 &= 0 \qquad (2) \\ 10x_1 - 10x_2 - 10\sin x_2 &= 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

Si vuole che all'equilibrio sia $x_2 = -\pi/2$, quindi dalla (1) e dalla (3) si ottiene

$$\begin{aligned} 0.1v &= x_1 + \pi/2 \\ 10x_1 &= -10(1 + \pi/2) \end{aligned}$$

da cui si ricava $x_1 = -(1 + \pi/2)$ e $\bar{v} = -10$. Per discutere la stabilità del punto di equilibrio trovato proviamo a calcolare la matrice A del sistema linearizzato:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 10 & -10 & 0 \end{bmatrix},$$

che ha autovalori in 0; $-0.5 \pm j3.1225$. Il sistema linearizzato risulta semplicemente stabile, ma non è possibile concludere nulla sulla stabilità dell'equilibrio del sistema non-lineare.

Esercizio 2

1. Per $a = 1$ si ha $A = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, con polinomio caratteristico $p(s) = s^3 - 2s^2 - 0.25s + 0.5$. La matrice di raggiungibilità del sistema è data da

$$K_c = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.25 \\ 1 & 1 & 0.25 \\ 0 & 1 & 2.25 \end{bmatrix}$$

ed ha rango pieno, quindi gli autovalori in catena chiusa sono assegnabili a piacere. In particolare si ha $p_{des}(s) = (s + 2)^3$ ed utilizzando la procedura standard si ottiene $K = [-10.9259,\ 2.9259,\ -28.4444]$, da cui si può verificare che gli autovalori di $A + BK$ sono tutti in -2 come desiderato.

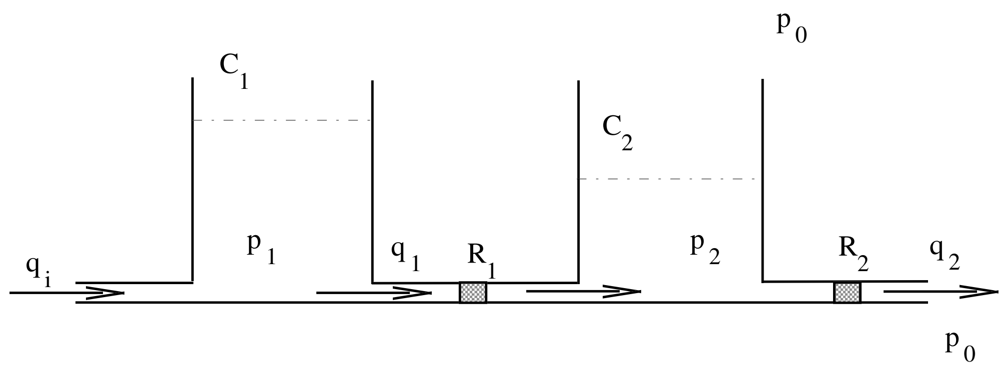
2. Se $a = 0$ è immediato verificare che il sistema è in forma canonica di Kalman di controllabilità. La parte non controllabile del sistema ha autovalore pari a 2 e tale autovalore non è modificabile da alcun controllore.

Esercizio 3

Un sistema è stabile esternamente se e solo se è stabile la sua parte completamente controllabile ed osservabile, ovvero se la sua funzione di trasferimento ha poli (radici del denominatore, posto che numeratore e denominatore siano coprimi) stabili. Per il test (di necessità) di Hurwitz, condizione *necessaria* affinchè un polinomio abbia tutte le radici a parte reale strettamente negativa (e quindi stabili asintoticamente) è che esistano tutti i coefficienti del polinomio e che essi abbiano segno concorde. Nel problema dato possiamo quindi concludere che il sistema non è esternamente stabile.

Teoria dei Sistemi
— Diploma Teledidattico —

Esercizio 1
Il sistema rappresentato in figura è costituito da due serbatoi di capacità rispettivamente C_1 e C_2, collegati tra loro tramite una resistenza idraulica non lineare R_1. Siano p_1, p_2 rispettivamente le pressioni presenti sul fondo dei due serbatoi, sia p_0 la pressione esterna e sia q_i la portata di ingresso del sistema e q_2 la portata di uscita. I dati numerici (in opportune unità normalizzate) sono: $p_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $R_1 = \frac{1}{p_1 - p_0}$, $R_2 = 0.5$.



Nota: Per un generico serbatoio di capacità C, detta p la pressione sul fondo e q la portata netta entrante, la relazione fondamentale è $q = C\frac{\partial p}{\partial t}$.

1. Si scelgano opportunamente le variabili di stato del sistema e si determinino le equazioni di stato che regolano la dinamica del sistema.

2. Si determinino gli stati di equilibrio del sistema, per ingresso nominale costante $q_i = \bar{q}_i = 2$, e se ne discuta la stabilità.

Esercizio 2
Si consideri il seguente sistema lineare a tempo continuo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_2.$$

1. Decidete quale dei due ingressi (u_1 e/o u_2) permette di agire sul sistema in modo da renderlo asintoticamente stabile.

2. Costruire una legge di controllo del tipo $u_i = Kx + v$ (dove i è uguale a 1 o 2, a seconda dell'ingresso scelto al punto precedente), in modo da posizionare gli autovalori in catena chiusa del sistema in $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -5$.

3. Dire con quali dei due ingressi (u_1 e/o u_2) è possibile (tramite retroazione sugli stati) posizionare gli autovalori del sistema in catena chiusa in $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = -1$.

Esercizio 3

Tracciare i diagrammi di Bode asintotici (approssimati) di modulo e fase per la seguente funzione di trasferimento (commentare il procedimento)

$$F(s) = 10\frac{s-1}{(s+1)(s^2+10s+100)}.$$

SOLUZIONI

Esercizio 1

1. Stati: $x_1 = p_1$, $x_2 = p_2$. Ingresso: $u = q_i$. Uscita: $y = q_2$. Per la prima resistenza idraulica si ha

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = & R_1 q_1 \\ u - q_1 & = & C_1 \dot{x}_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 = \frac{1}{C_1}\left(u - \frac{1}{R_1}x_1 + \frac{1}{R_1}x_2\right).$$

Per la seconda resistenza idraulica si ha

$$\begin{cases} x_2 - p_0 & = & R_2 y \\ q_1 - y & = & C_2 \dot{x}_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{C_2}\left(\frac{1}{R_1}x_1 - \frac{1}{R_1}x_2 - \frac{1}{R_2}x_2 + \frac{1}{R_2}p_0\right).$$

Sostituendo R_1 nelle espressioni precedenti, si ottiene:

$$\dot{x}_1 = u - (x_1 - p_0)x_1 + (x_1 - p_0)x_2 \quad (1)$$
$$\dot{x}_2 = (x_1 - p_0)x_1 - (x_1 - p_0)x_2 - \frac{1}{R_2}x_2 + \frac{1}{R_2}p_0 \quad (2)$$

e, sostituendo i valori numerici dei parametri

$$\dot{x}_1 = u - (x_1 - 1)x_1 + (x_1 - 1)x_2 = u - (x_1 - 1)(x_1 - x_2) \quad (3)$$
$$\dot{x}_2 = (x_1 - 1)x_1 - (x_1 - 1)x_2 - 2x_2 + 2 = (x_1 - 1)(x_1 - x_2) - 2x_2 + 2 \quad (4)$$

2. Stati di equilibrio: si pone $u = \bar{q}_i = 2$ e si pongono a zero le derivate degli stati:

$$2 - (x_1 - 1)(x_1 - x_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x_1 - 1)(x_1 - x_2) = 2 \quad (5)$$
$$(x_1 - 1)(x_1 - x_2) - 2x_2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 - 2x_2 + 2 = 0, \quad (6)$$

dalle quali si ottiene

$$x_2 = 2$$
$$x_1(x_1 - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_1 = 3$$

Si ottengono due punti di equilibrio

$$x_I = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad x_{II} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Linearizzo il sistema:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -2x_1 + x_2 + 1 \quad (7)$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = x_1 - 1 \quad (8)$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 2x_1 - x_2 - 1 \quad (9)$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -x_1 - 1 \quad (10)$$

che valutate nei due punti di equilibrio forniscono

$$A_I = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}; \tag{11}$$

$$A_{II} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

La matrice A_I ha autovalori in $3.6458,\ -1.6458 \rightarrow$ punto di equilibrio **instabile**. La matrice A_{II} ha autovalori in $-1,\ -6 \rightarrow$ punto di equilibrio **asintoticamente stabile**.

Esercizio 2

1. La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

ha autovalori in $3.3723,\ -2.3723,\ 5$, quindi è instabile.

Consideriamo il primo ingresso u_1 e il relativo vettore di ingresso $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. È immediato verificare che la coppia (A, B_1) è in forma di Kalman di controllabilità e che l'autovalore non controllabile è $\lambda_{nc} = 5$ (instabile!). Tale autovalore non potrà quindi essere reso stabile agendo su u_1.

Consideriamo ora il secondo ingresso u_2 e il relativo vettore di ingresso $B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$: la matrice di raggiungibilità della coppia (A, B_2) è data da

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & 17 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix},$$

e risulta avere rango pari a 3. Il sistema è quindi completamente controllabile dall'ingresso u_2 e quindi anche stabilizzabile.

2. Polinomio caratteristico di A:

$$p(s) = s^3 - 6s^2 - 3s + 40.$$

Polinomio desiderato in catena chiusa:

$$p_{des}(s) = (s+5)^3 = s^3 + 15s^2 + 75s + 125$$

Matrice di controllabilità:

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & 17 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix}$$

Sistema in forma companion:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -40 & 3 & 6 \end{bmatrix}; \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matrice di controllabilità di (A_c, B_c):

$$R_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 39 \end{bmatrix}.$$

Matrice $T = R_c R_2^{-1}$:

$$T = \begin{bmatrix} 0.2500 & 0.1875 & -0.1875 \\ 1.0000 & 0.5000 & -0.5000 \\ 3.0000 & 2.0000 & -1.0000 \end{bmatrix}.$$

Matrice del controllore K:

$$K = [a_0 - \bar{a}_0 \ \cdots \ a_{n-1} - \bar{a}_{n-1}]T = [-85 \ -78 \ -21]T = [-162.2500 \ \ -96.9375 \ \ 75.9375].$$

3. Con uno qualsiasi dei due ingressi.

Esercizio 3
Guadagno stazionario:

$$K = \lim_{s \to 0} F(s) = 10 \frac{-1}{100} = -0.1$$

cioè $|K| = 0.1 = -20$ dB, $\angle K = \pm 180$.
Poli: $p_1 = -1$; $p_{2,3}$ complessi coniugati con $\omega_n = 10$ e $\xi = 0.5$. Picco di risonanza $M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = 1.15 \simeq 1.25$ dB.
Zeri: $z_1 = +1$: zero a DX!
Fase iniziale: $\pm$ 180 (prendiamo ad es. +180).
Fase finale: +180 (fase iniz.) - 90 (zero a dx) - 90 (polo) -180 (poli c.c.) = -180.

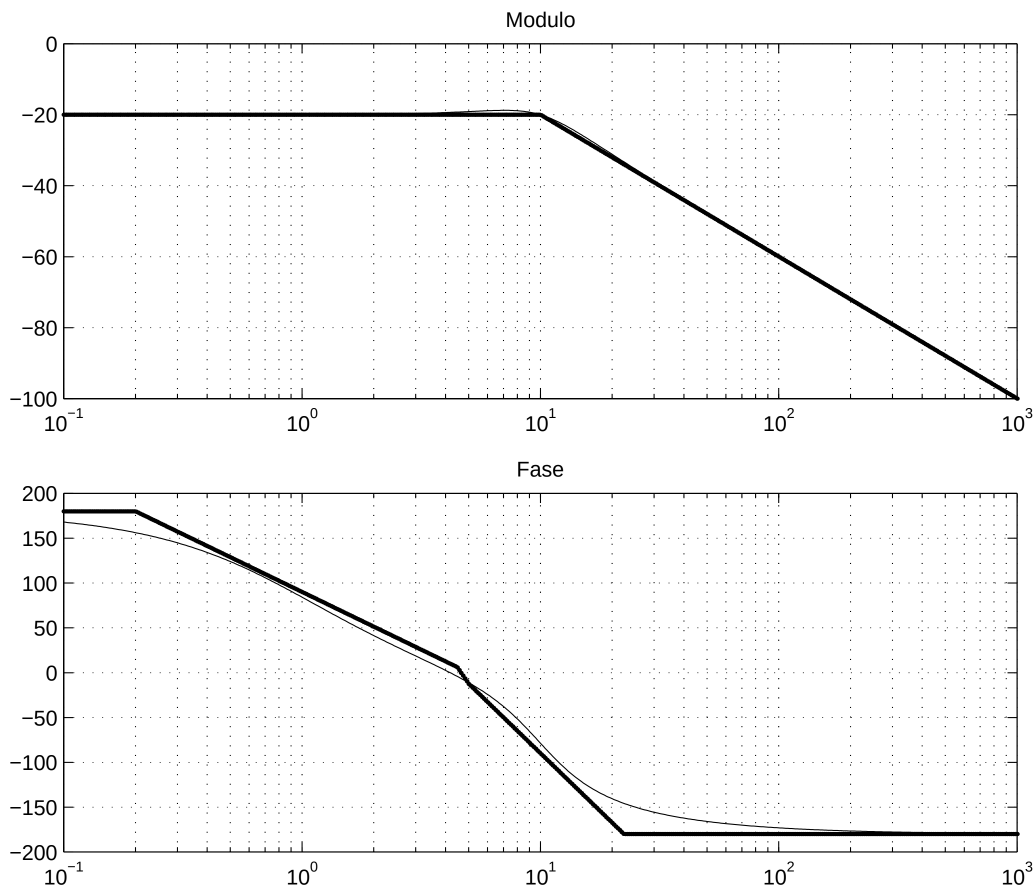
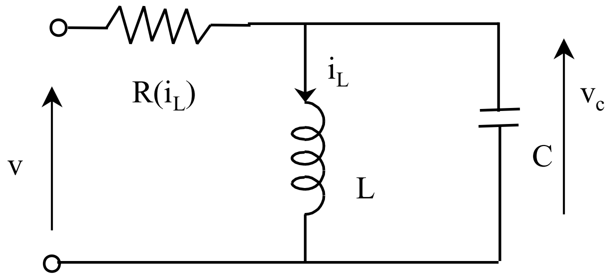


Figure 1: Diagrammi di Bode di $F(j\omega)$.

Teoria dei Sistemi
— Diploma Teledidattico — Appello del 20-07-2000

Esercizio 1
Si consideri la rete elettrica rappresentata in figura, dove (in opportune unità normalizzate) $C = 0.5$, $L = 0.5$ ed R è un resistore non lineare il cui valore di resistenza dipende dalla corrente i_L secondo la relazione

$$R(i_L) = \frac{10}{i_L + 9}.$$



Siano inoltre $v(t)$ la tensione di ingresso del sistema, e $v_c(t)$ la tensione di uscita.

1. Scegliere opportunamente gli stati e scrivere le equazioni in variabili di stato del sistema.

2. Determinare gli eventuali stati di equilibrio del sistema corrispondenti all'ingresso nominale costante $v(t) = \bar{v} = 1$ e discuterne la stabilità.

Esercizio 2
Si consideri il seguente sistema lineare a tempo continuo (A, B, C):

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1.8 & -2 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u; \\ y &= [0 \ \ 1]\zeta. \end{aligned}$$

1. Determinare, se possibile, una legge di controllo in retroazione sugli stati del tipo $u = -K\zeta + r$ in modo da imporre una coppia di autovalori in catena chiusa stabili con pulsazione naturale $\omega_n = 2$ e smorzamento $\xi = 0.25$.

2. Si consideri una legge di controllo in retroazione sulla uscita del tipo $u = -ky + r$. Per quali valori del parametro k il sistema in catena chiusa risulta asintoticamente stabile?

3. Con riferimento al punto 1. si determini la funzione di trasferimento $F(s)$ tra r ed y del sistema in catena chiusa, e se ne riportino (con l'aiuto di Matlab) i diagrammi di Bode di modulo e fase, quotando opportunamente i diagrammi.

4. Con riferimento al punto 1., si determini (con l'aiuto di Matlab) la risposta al gradino del sistema controllato, e se ne riporti un grafico opportunamente quotato.

5. Con riferimento al punto 1., sia $y_r(t)$ la risposta a regime permanente del sistema in catena chiusa (cioè $y(t) \simeq y_r(t)$ per $t \to \infty$). Dato un ingresso del tipo $r(t) = U\cos(\omega t)$, determinare per quali valori di U si ha $|y_r(t)| \leq 0.01$, $\forall t$ e per ogni possibile pulsazione di ingresso ω.

Soluzioni

Esercizio 1

1. Gli stati del sistema siano la corrente i_L che circola nell'induttore e la tensione v_c ai capi del condensatore, quindi

$$\begin{cases} x_1 &= i_L \\ x_2 &= v_c \end{cases}$$

L'ingresso del sistema è $u = v$ e l'uscita è data da $y = x_2$. Le equazioni che regolano la dinamica del sistema sono date da

$$\begin{array}{rcl} v_c &=& L\frac{di_L}{dt} \\ v &=& v_c + R(i_L + C\frac{dv_c}{dt}) \end{array}$$

che in forma standard forniscono le equazioni di stato

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 = f_1(x,u) &=& \frac{1}{L}x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x,u) &=& \frac{1}{RC}(-Rx_1 - x_2 + u). \end{array}$$

Si noti che il sistema precedente non è lineare, in quanto la resistenza R dipende dal valore della corrente i_L. Sostituendo i valori numeric dei parametri, e la funzione che descrive R, otteniamo

$$\begin{array}{rl} \dot{x}_1 = & 2x_2 \\ \dot{x}_2 = & -2x_1 - \frac{x_2(x_1+9)}{5} + \frac{(x_1+9)}{5}u = -2x_1 - 0.2x_1x_2 - 1.8x_2 + 0.2x_1u + 1.8u. \end{array} \quad (1)$$

2. Gli stati di equilibrio si ottengono ponendo nella (1) $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$, $u = \bar{u} = 1$, quindi

$$\begin{array}{rcl} x_2 &=& 0 \\ -2x_1 + 0.2x_1 &=& -1.8 \end{array} \Rightarrow x_{eq} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per la verifica della stabilità occorre linearizzare il sistema (1) nell'intorno del punto di equilibrio trovato:

$$\begin{array}{rcl} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{x_{eq},\bar{u}} &=& 0 \\ \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{x_{eq},\bar{u}} &=& 2 \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{x_{eq},\bar{u}} &=& -1.8 \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{x_{eq},\bar{u}} &=& -2 \end{array}$$

quindi la matrice del sistema linearizzato è

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1.8 & -2 \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda_{1,2} = -1 \pm j1.6125 \rightarrow$ lo stato di equilibrio è asintoticamente stabile.

Esercizio 1

1. La matrice di raggiungibilità del sistema

$$K_r = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

ha rango pieno (pari a 2), quindi il sistema è completamente controllabile. Gli autovalori desiderati in catena chiusa sono le radici del seguente polinomio del secondo ordine

$$p(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2,$$

dove, se si pone $\omega_n = 2$ e $\xi = 0.25$, si ottengono le radici $-0.5 \pm 1.9365i$. Il vettore degli autovalori desiderati è quindi $P = [-0.5 + 1.9365i; \ \ -0.5 - 1.9365i]$. Per il calcolo di K possiamo utilizzare il comando Matlab `K=place(A,B,P)`, con il quale otteniamo

$$K = [0.1; \ \ -0.5].$$

È quindi possibile verificare che gli autovalori della matrice del sistema in catena chiusa $A_{cc} = A - BK$ sono effettivamente nelle posizioni desiderate.

Si poteva procedere al calcolo di K anche in modo manuale. Si pone dapprima il sistema in forma canonica di controllo: il polinomio caratteristico del sistema è dato da $p(s) = s^2 + 2s + 3.6$, quindi

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3.6 & -2 \end{bmatrix}; \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice di raggiungibilità risultante è quindi $\bar{K}_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Si ha allora

$$T = \bar{K}_r K_r^{-1} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio desiderato in catena chiusa è dato da $p_{des}(s) = s^2 + s + 4$, quindi

$$K = [3.6 - 4, \ \ 2 - 1]T = [-0.4, \ \ 1]T = [-0.1, \ \ 0.5].$$

La matrice risultante in catena chiusa è data da $A_{cc} = A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Calcoliamo dapprima la funzione di trasferimento del sistema di partenza, ad esempio tramite il comando Matlab `[num,den]=ss2tf(A,B,C,0)`, ottenendo la f.d.t.
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s}{s^2 + 2s + 3.6}.$$
Considerando la retroazione proposta in frequenza, sostituendo la relazione $U(s) = -kY(s) + R(s)$, in $Y(s) = G(s)U(s)$, e raccogliendo $Y(s)$, si ottiene la funzione di trasferimento in catena chiusa
$$G_{cc}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + kG(s)} = \frac{2s}{s^2 + 2(1+k)s + 3.6}$$
Dal criterio di Routh si ottiene immediatamente che il sistema in catena chiusa è stabile se e solo se $1 + k > 0$, quindi per $k > -1$.

3. Con il vettore K determinato al punto 1., il sistema in catena chiusa è descritto da
$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= A_{cc}\zeta + Br \\ y &= [0\ \ 1]\zeta \end{aligned}$$
quindi
$$F(s) = [0\ \ 1](sI - A_{cc})^{-1}B = \frac{2s}{s^2 + s + 4}.$$
Questo si poteva anche calcolare tramite il comando `[ncc,dcc]=ss2tf(A-B*K,B,C,0)`.

Bode:
Poli: $\omega_n = 2$, $\xi = .25$, picco di risonanza $M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = 2.06 = 6.3$ dB.
Zeri: zero nell'origine.
Comportamento in "bassa frequenza": $F(j\omega) \simeq \frac{2s}{4}$, per $\omega < 0.2$. In $\omega = 0.1$ il modulo di F vale quindi circa $0.1/2 = 0.05 \simeq -26$ dB.
Fase iniziale: +90. *Fase finale:* -90.

4. È sufficiente tracciare il grafico della risposta al gradino della funzione $F(s)$, tramite il comando `step(ncc,dcc)`.

5. $|y_r(t)| \leq U|F(\omega)| \leq U \max_\omega |F(\omega)|$. Il massimo del modulo di $F(\omega)$ si può ricavare dal diagramma di Bode e vale circa 2. Imponiamo quindi $2U \leq 0.01$, quindi $U \leq 0.005$.

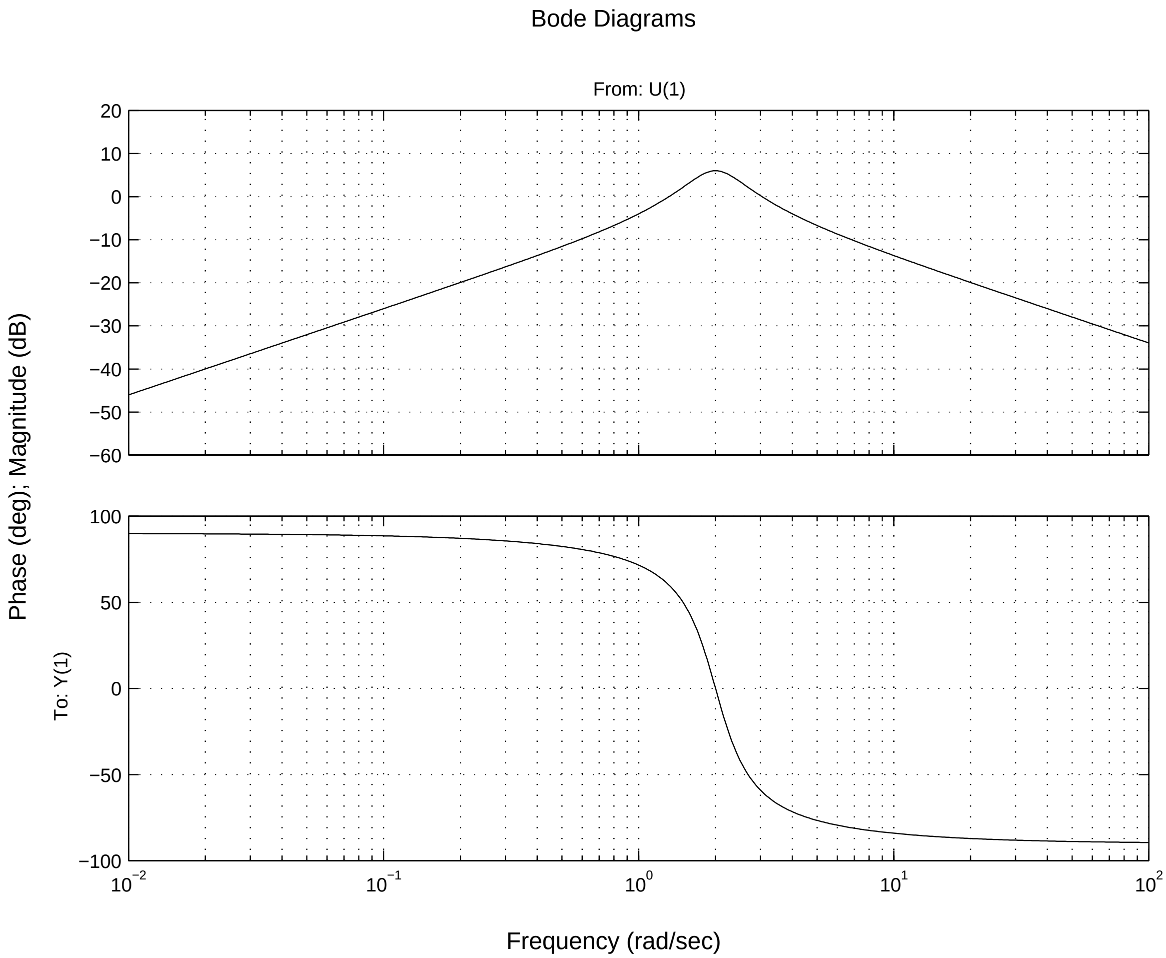
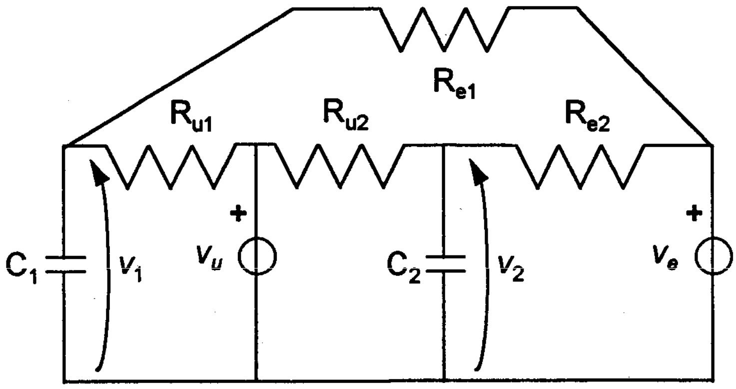


Figure 1: Diagrammi di Bode di $F(j\omega)$.

TEORIA DEI SISTEMI – Ing. Informatica e Automatica – Consorzio Nettuno – Alessandria
Compito del 20-3-97

Esercizio 1
Nel sistema illustrato in figura le tensioni $v_u(t)$ e $v_e(t)$ sono gli ingressi, mentre la tensione $v_2(t)$ è l'uscita.



I valori numerici dei parametri sono: $C_1 = C_2 = 1$ F, $R_{e1} = 1/2\ \Omega$, $R_{e2} = 1/4\ \Omega$, $R_{u1} = 1/(v_u - v_1)$, $R_{u2} = 1/[2(v_u - v_2)]$.

1. Scrivere il modello matematico del sistema (equazioni di stato).
2. Quanto deve valere la tensione costante di equilibrio $\overline{v_u}$ per avere il punto di equilibrio $\overline{v_1} = \overline{v_2} = 20$ V con $\overline{v_e} = 2$ V?
3. Studiare la stabilità dello stato di equilibrio di cui sopra.

Esercizio 2
Dato il sistema lineare:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -15x_1 + x_2 + 12u + 2d\\ \dot{x}_2 &= x_1 - 29x_2 + 24u + 4d\\ y &= x_2\end{aligned}$$

Si supponga che $x(0) = 0$, $u(t) = 0$, $d(t) = 10$, per $t \geq 0$. Quanto vale $y(t)$, per $t \geq 0$? Quanto vale $\lim_{t\to\infty} y(t)$?

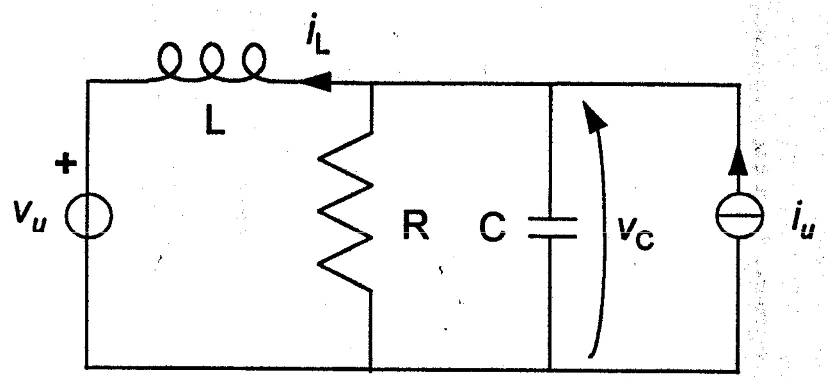
Esercizio 3
Dato il sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \mathrm{e}^{-x_1(t)} - x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

1. Trovare gli stati di equilibrio.
2. Discutere la stabilità degli eventuali stati di equilibrio mediante il metodo della linearizzazione.
3. Per gli eventuali stati di equilibrio stabili verificare, se possibile, la stabilità mediante il criterio di Lyapunov usando $V(x) = a(x_1 - c)^2 + b(x_2 - d)^2$.

TEORIA DEI SISTEMI – Ing. Informatica e Automatica – Consorzio Nettuno – Alessandria
Compito del 18-7-96

Esercizio 1
Nel sistema illustrato in figura la corrente $i_u(t)$ e la tensione $v_u(t)$ sono gli ingressi, mentre la tensione $v_c(t)$ è l'uscita.



I valori numerici dei parametri sono: $C = 1$ F, $L = 0.5$ H, $R = 0.1$ Ω.

1. Scrivere il modello matematico del sistema (equazioni di stato).
2. Calcolare le funzioni di trasferimento $M_1(s) = V_c(s)/I_u(s)$ e $M_2(s) = V_c(s)/V_u(s)$.
3. Si supponga $x(0) = 0$ e, per $t \geq 0$, $i_u(t) = 10$ ed $v_u(t) = 0$. Quanto vale $v_c(t)$ per $t \geq 0$?
4. Si supponga che, per $t \geq 0$, $i_u(t) = 10$ ed $v_u(t) = V \sin t$. Per quali valori di V risulta che, per t "sufficientemente grande", $v_c(t) \leq 2$?

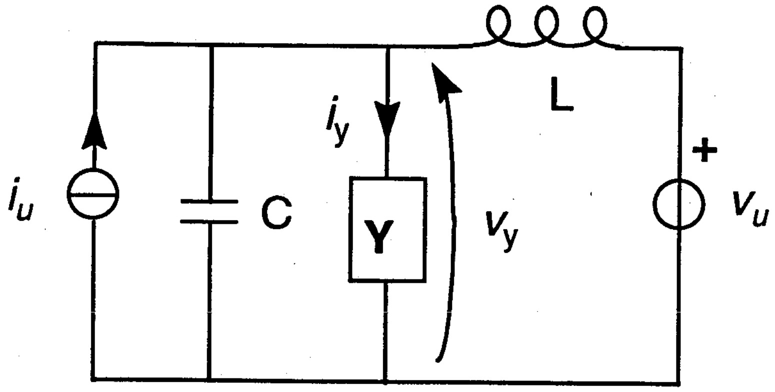
Esercizio 2
Dato il sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -10x_1(t) - \varepsilon x_2(t) + \varepsilon x_1^2(t)x_2(t)\end{aligned}$$

1. Trovare gli stati di equilibrio.
2. Discutere la stabilità degli eventuali stati di equilibrio al variare del parametro ε.

TEORIA DEI SISTEMI – Ing. Informatica e Automatica – Consorzio Nettuno – Alessandria
Compito del 23-10-97

Esercizio 1
Nel sistema illustrato in figura:



la tensione $v_u(t)$ e la corrente $i_u(t)$ sono gli ingressi e la tensione $v_y(t)$ è l'uscita. I valori numerici dei parametri sono: $L = 1/3$ H, $C = 1/2$ F, mentre il componente Y presenta la seguente caratteristica non lineare: $i_y(t) = v_y^2(t) + v_y(t)$

1. Scrivere il modello matematico del sistema (equazioni di stato).
2. Calcolare gli stati di equilibrio corrispondenti agli ingressi costanti $v_u(t) = \overline{V}$, $i_u(t) = \overline{I}$ e studiarne la stabilità mediante il metodo di linearizzazione, nei seguenti due casi:

$$a) \begin{cases} \overline{V} = -1 \\ \overline{I} = 1 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} \overline{V} = -1/2 \\ \overline{I} = 1/2 \end{cases}$$

Esercizio 2
Dato il sistema lineare:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -4x_1(t) + 5x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) \\ y(t) &= -x_1(t) - x_2(t) \end{aligned}$$

si supponga che $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $u(t) = 3$, per $t \geq 0$. Quanto valgono $y(t)$, per $t \geq 0$ e $\lim_{t\to\infty} y(t)$?

Esercizio 3
Dato il sistema non lineare:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + 1 \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t)x_2(t) - 2x_2(t) \end{aligned}$$

1. trovare gli stati di equilibrio e discuterne la stabilità mediante il metodo della linearizzazione;
2. per gli eventuali stati di equilibrio asintoticamente stabili, verificare la stabilità mediante il criterio di Lyapunov. (Se utile: $V(x) = a\,(x_1 - c)^2 + b\,(x_2 - d)^2$)

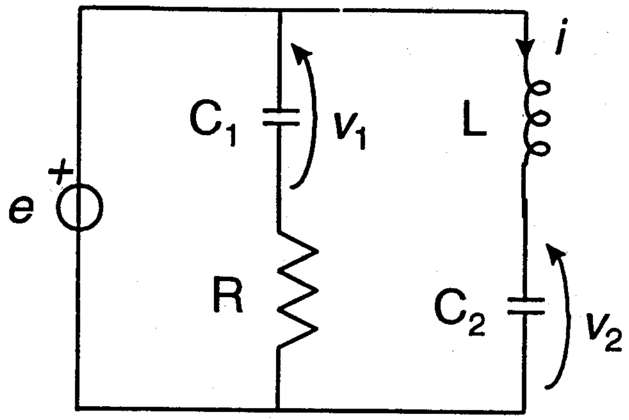
TEORIA DEI SISTEMI

Ing. Informatica - Consorzio Nettuno - Alessandria

Compito del 22-10-98

Esercizio 1

Nel sistema illustrato in figura la tensione *e(t)* è l'ingresso e la tensione $v_2(t)$ è l'uscita.



1. Scrivere le equazioni di ingresso-stato-uscita e studiare la stabilità del sistema sapendo che i valori numerici dei parametri sono tutti strettamente positivi.
2. Calcolare gli stati di equilibrio corrispondenti all'ingresso costante $\bar{e}$.

Esercizio 2

Dato il sistema lineare:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

Si supponga che $x(0)=[2\ \ 0]^T$, $u(t)=1$ per $t = 0$ e $u(t)=0$ per $t \neq 0$. Quanto vale $y(t)$ per $t \geq 0$.

Esercizio 3

Dato il sistema non lineare:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -3x_1 + \varepsilon x_2 - \varepsilon x_1^2 x_2$$

1. Trovare gli stati di equilibrio e discuterne la stabilità, al variare del parametro ε, mediante il metodo della linearizzazione.
2. Per gli eventuali stati di equilibrio asintoticamente stabili, verificare la stabilità mediante il criterio di Lyapunov. (Se utile: $V(x) = 3(x_1)^2 + (x_2)^2$)