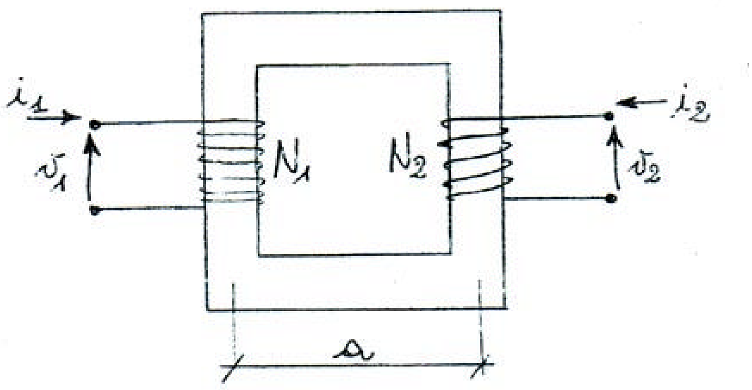
1 Trasformatore

Si consideri il seguente circuito magnetico:

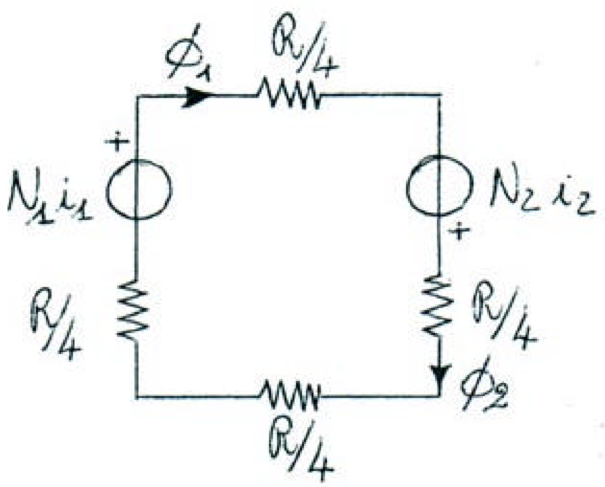


Sia S la sezione del materiale ferromagnetico.

Si facciano le seguenti ipotesi:

1) <u>assenza di flussi dispersi</u>, ovvero il campo $\vec{B}$ è incanalato nel circuito magnetico e dunque all'esterno del circuito $\vec{B}$ è trascurabile. E' la stessa ipotesi alla base della 1ª legge dei circuiti magnetici.
2) <u>Assenza di perdite nel nucleo</u> di materiale ferromagnetico, ovvero la potenza dissipata dal nucleo è nulla.
3) <u>Assenza di perdite negli avvolgimenti</u> di materiale conduttore (rame), ovvero la resistivitàe dunque la potenza dissipata è nulla.

L'equivalente elettrico del circuito magnetico è:



$$R = \frac{4a}{m_0 m_r S}$$

$$f_1 = f_2 = f = \frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{R} = \frac{N_1}{R} i_1 + \frac{N_2}{R} i_2$$

a) $$v_1 = N_1 \frac{df_1}{dt} = \frac{N_1^2}{R}\frac{di_1}{dt} + \frac{N_1 N_2}{R}\frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = N_2 \frac{df_2}{dt} = \frac{N_1 N_2}{R}\frac{di_1}{dt} + \frac{N_2^2}{R}\frac{di_2}{dt}$$

$$L_1 = \frac{N_1^2}{R} \qquad L_2 = \frac{N_2^2}{R} \qquad M = \frac{N_1 N_2}{R} = \sqrt{L_1 L_2}$$

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1 \Rightarrow$$ accoppiamento perfetto

Si definisca il **rapporto spire n**

$$\boxed{n = \frac{N_1}{N_2}}$$

si ha che:

$$\frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2}\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = n$$

Si scrivano ora le equazioni nel caso di regime sinusoidale permanente

$$\frac{d}{dt} \rightarrow jw$$

$$\begin{cases} V_1 = jwL_1 I_1 + jwMI_2 \\ V_2 = jwMI_1 + jwL_2 I_2 \end{cases}$$

$$V_1 = jwL_1\left(I_1 + \frac{M}{L_1} I_2\right) = jwL_1\left(I_1 + \frac{1}{n} I_2\right)$$

$$V_2 = jwL_2 \frac{M}{L_2} I_1 + jwL_2 \frac{M}{L_2}\frac{L_2}{M} I_2 = jwL_2 \frac{M}{L_2}\left(I_1 + \frac{L_2}{M} I_2\right) = jwL_2 n\left(I_1 + \frac{I_2}{n}\right)$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{jwL_1\left(I_1 + I_2/n\right)}{jwL_2 n\left(I_1 + I_2/n\right)} = \frac{L_1}{L_2}\frac{1}{n} = \frac{n^2}{n} = n$$

$$\boxed{V_1 = nV_2}$$

Si faccia ora l'ulteriore ipotesi:

4) il circuito magnetico è realizzato con materiale ferromagnetico ideale, ovvero $\mu_r \to \infty$

Ne deriva che:

$$R = \frac{4a}{\mu_0 \mu_r S} \to 0$$

$$L_1 = \frac{N_1^2}{R} \to \infty$$

Si è detto che:

$$V_1 = j\omega L_1 \left(I_1 + \frac{I_2}{n} \right)$$

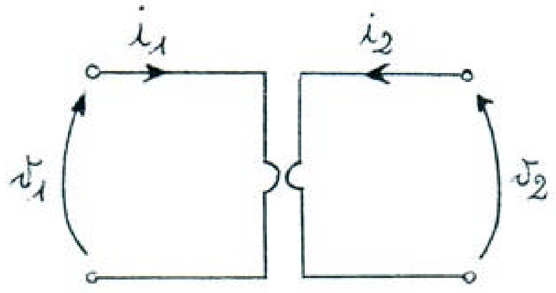
$$I_1 = \frac{V_1}{j\omega L_1} - \frac{I_2}{n}$$

se $L_1 \to \infty$ $\boxed{I_1 = -\frac{I_2}{n}}$

Riassumendo:

$$\boxed{\begin{array}{l} V_1 = nV_2 \\ I_1 = -\dfrac{I_2}{n} \end{array}}$$ trasformatore ideale

Il simbolo è:



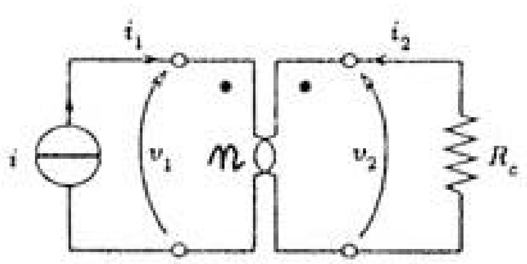
Considerazioni energetiche

$$p(t)=v_1(t)i_1(t)+v_2(t)i_2(t)=nv_2(2)\left[-\frac{1}{n}i_2(t)\right]+v_2(t)i_2(t)=-v_2(t)i_2(t)+v_2(t)i_2(t)=0$$

Il trasformatore ideale non dissipa e non immagazzina energia.

Esempio 1

Con riferimento alla figura seguente, si voglia calcolare il rapporto tensione/corrente sulla porta 1 del trasformatore ideale.



Si ha:

$$v_1/i=R_e$$

$$v_2=-R_c i_2$$

$$v_1=nv_2$$

$$i=i_1=-\frac{1}{n}i_2$$

$$v_1=n(-R_c i_2)=n^2R_c i_1$$

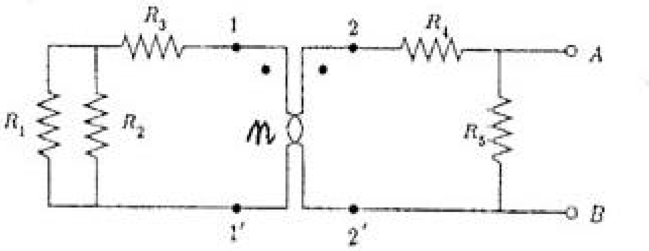
Quindi quando la porta 2 di un trasformatore ideale è chiusa su un resistore di resistenza R_c , dalla porta 1 si vede un bipolo che è resistore di resistenza equivalente:

$$R_e = n^2 R_c$$

Evidentemente, se le porte invertono il loro ruolo di modo che il resistore R_c chiude la porta 1, allora alla porta 2 si misura una resistenza di valore

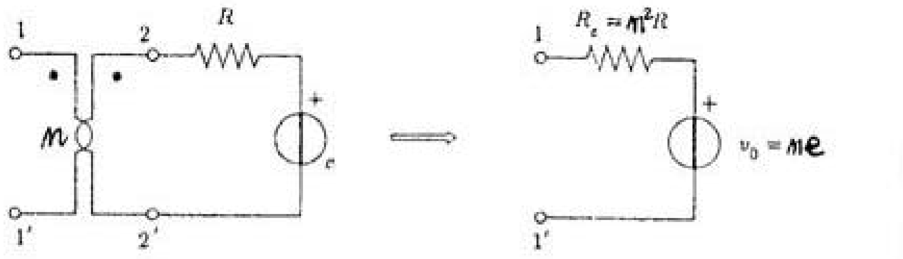
$$R_e = \frac{1}{n^2} R_c$$

Esempio 2



Per la rete di figura calcolare:

1. la resistenza del resistore visto dai morsetti A – B
2. determinare inoltre la rappresentazione Thevenin del bipolo indicato nella figura seguente



(a) (b)

Tenendo conto della formula ricavata in precedenza $R_e = \frac{1}{n^2} R_c$, risulta:

$$\left(\frac{R_1 \| R_2 + R_3}{n^2} + R_4 \right) \| R_5 = R_{eq}$$

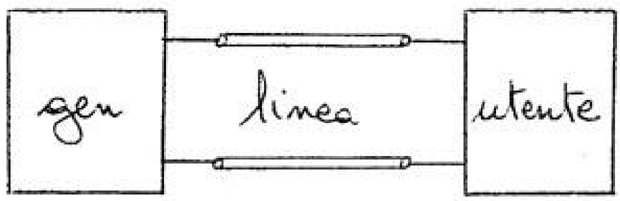
Dalla formula ricavata in precedenza ($R_e = n^2 R_c$) si deduce la resistenza Thevenin:

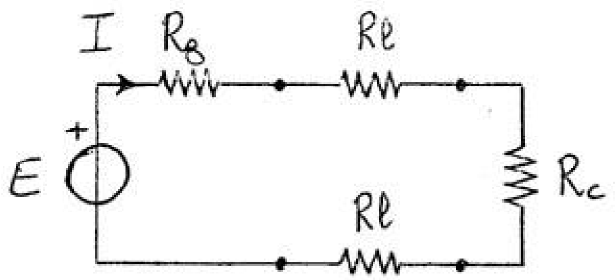
$R_e = n^2 R$

La tensione a vuoto si determina immediatamente tenendo conto che se $i_1 = 0$ anche $i_2 = 0$, in base alla relazione costitutiva del trasformatore ideale; quindi $v_2 = e$ e $v_1 = ne$. Ne consegue la rappresentazione Thevenin della figura precedente.

1.1 Utilizzo dei trasformatori nella distribuzione dell'energia elettrica

Senza trasformatori



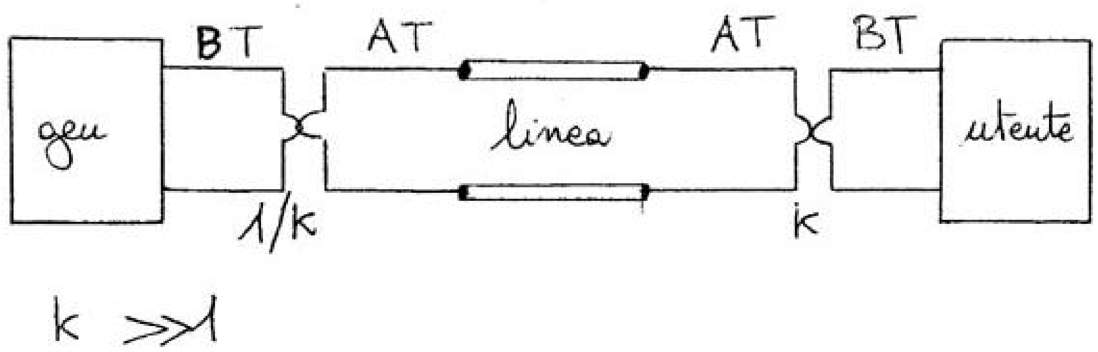


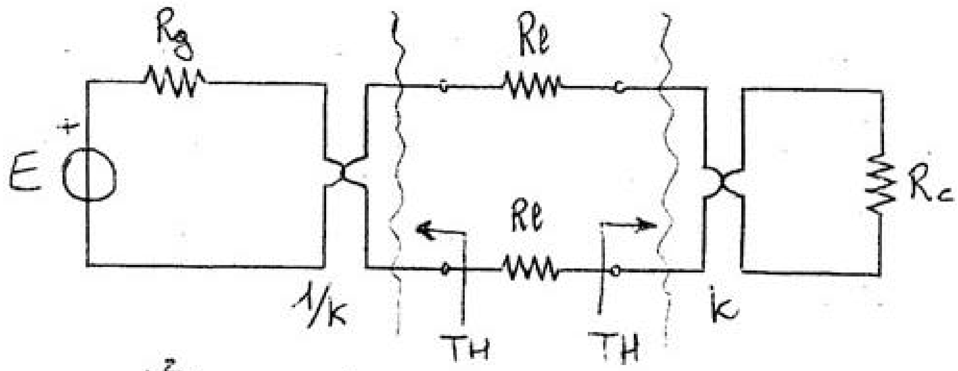
$R_l << R_c$
$R_l << R_g$

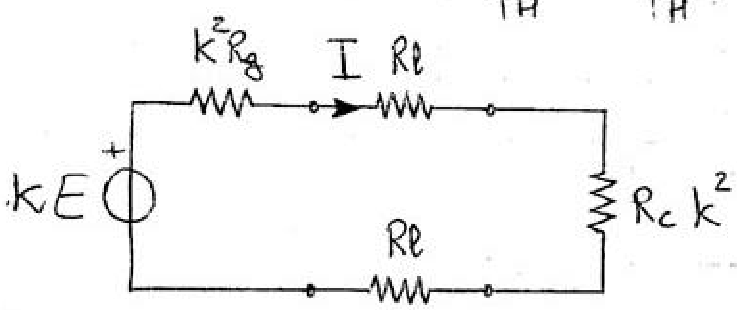
La potenza dissipata sulla linea di distribuzione è:

$$P_{diss}^{(0)} = 2R_l I^2 = 2R_l \left(\frac{E}{R_c + R_g + 2R_l} \right)^2 \cong 2R_l \frac{E^2}{(R_c + R_g)^2}$$

Con trasformatori





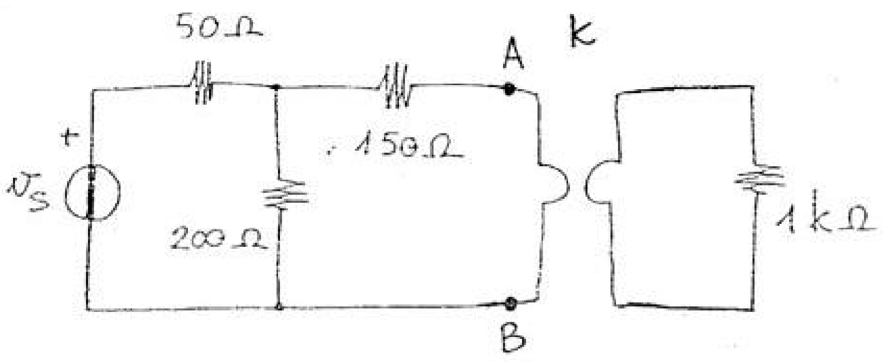


$$P_{diss}^{(0)} = 2R_l I^2 = 2R_l \left(\frac{kE}{k^2 (R_c + R_g) + 2R_l} \right)^2 \cong 2R_l \frac{1}{k^2} \frac{E^2}{(R_c + R_g)^2} = \frac{P_{diss}^{(0)}}{k^2}$$

La potenza dissipata sulla linea di distribuzione si è ridotta di un fattore k^2 con $k >> 1$.

1.2 Esercizio 1

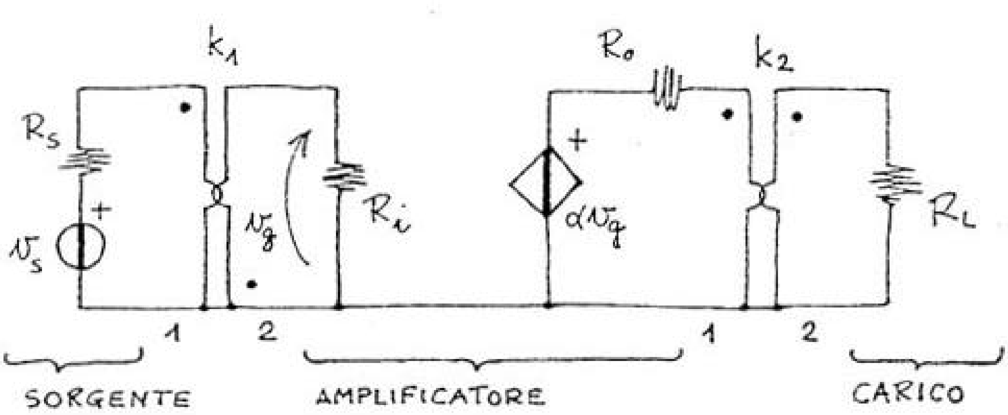
Nel circuito di figura lo stadio di interfaccia che procede il carico è costituito da un trasformatore ideale. Determinare il rapporto fra il numero di avvolgimenti $k = {}^{N_1}\!/\!{}_{N_2}$ affinché al carico venga trasferita la massima potenza.



$[k = 0{,}436]$

1.3 Esercizio 2

Nel circuito di figura determinare:
i rapporti di trasformazione k_1, k_2 in modo tale che al carico venga trasferito il massimo di potenza
la potenza dissipata dal carico nelle condizioni specificate al punto a)
ipotizzando che k_1, k_2 siano quelli determinati al punto a) e che il carico venga rimpiazzato con un resistore da $16\,\Omega$, determinare la potenza dissipata dal carico.



$R_s = 50\ \Omega$
$R_i = 20\,\mathrm{k}\Omega$
$R_0 = 600\ \Omega$
$R_L = 4\ \Omega$
$a = 800$
$v_s(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{10}\sin(wt)\ \mathrm{V}$

a) $k_1 \; {}^{1}\!/_{20}$ $\quad k_2 = \sqrt{150}$

b) $P = 266{,}67\ \text{W}$

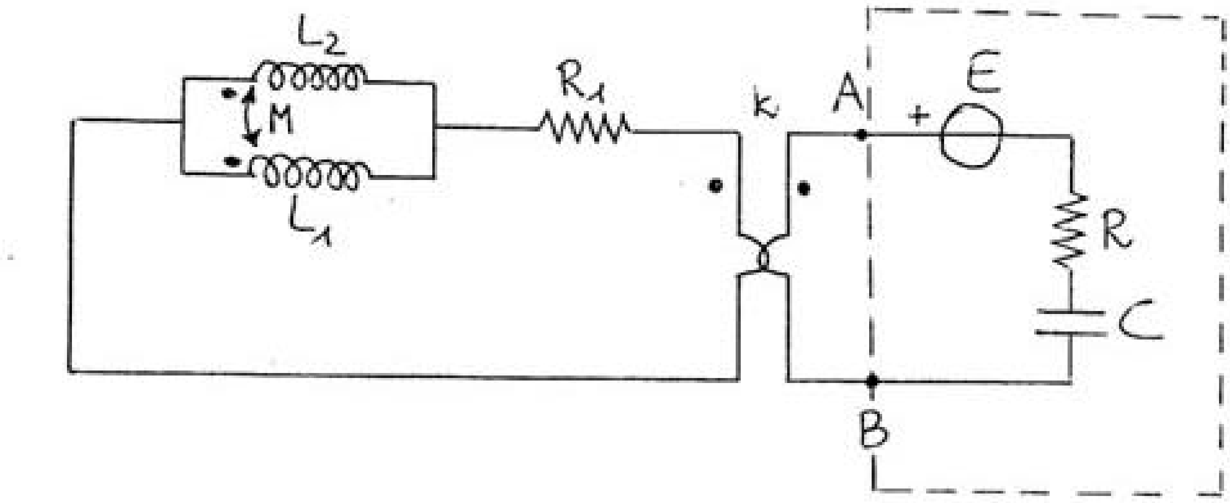
c) $P = 170{,}67\ \text{W}$

1.4 Esercizio 3

Nel circuito in figura il generatore di potenza, rappresentato dal bipolo a destra dei morsetti A – B, è caratterizzato da una tensione a vuoto sinusoidale di valore efficace E.

Determinare k ed M in modo che il generatore fornisca alla rete la sua potenza disponibile

Determinare inoltre quanto vale la sua potenza disponibile.



$$\left[\begin{array}{l} k = \sqrt{{}^{R_1}\!/_{R}} \\ M = \dfrac{k^2}{w^2 C} \pm \sqrt{\left(\dfrac{k^2}{w^2 C} - L_1\right)\left(\dfrac{k^2}{w^2 C} - L_2\right)} \\ P_{disp} = \dfrac{E^2}{2R} \end{array}\right]$$

1.5 Modello del trasformatore reale

Si rimuovono ora, ad una ad una, le ipotesi semplificative sotto le quali si è definito il trasformatore ideale.

Si rimuove innanzitutto l'ipotesi che il materiale ferromagnetico sia ideale, ovvero si assume μ_r di valore finito.
Nel dominio del tempo si era scritto:

$$\begin{cases} R\varphi = N_1 i_1 + N_2 i_2 \\ v_1 = N_1 \dfrac{d\varphi}{dt} \\ v_2 = N_2 \dfrac{d\varphi}{dt} \end{cases}$$

e dunque in regime sinusoidale:

$$\begin{cases} R\Phi = N_1 I_1 + N_2 I_2 \\ V_1 = j\omega N_1 \Phi \\ V_2 = j\omega N_2 \Phi \end{cases} \quad \Rightarrow \Phi = \frac{V_1}{j\omega N_1}$$

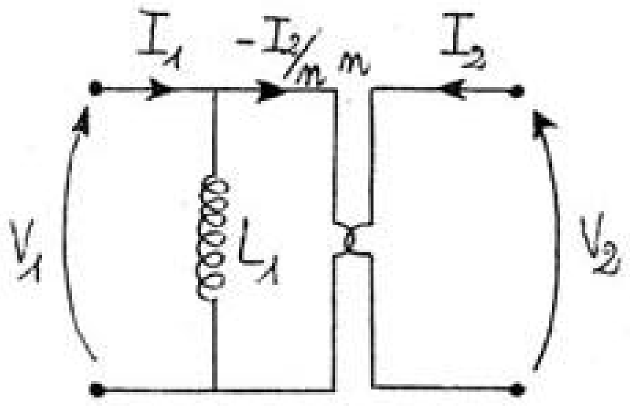
$$V_2 = j\omega N_2 \Phi = j\omega N_2 \frac{V_1}{j\omega N_1} = \frac{N_2}{N_1} V_1 = \frac{V_1}{n}$$

Ciò significa che la relazione del trasformatore ideale per le tensioni è ancora rispettata.

$$R\Phi = N_1 I_1 + N_2 I_2$$

$$I_1 = \frac{R\Phi}{N_1} - \frac{N_2}{N_1} I_2 = \frac{R}{N_1} \frac{V_1}{j\omega N_1} - \frac{I_2}{n} = \frac{R}{j\omega N_1^2} V_1 - \frac{I_2}{n} = \frac{V_1}{j\omega L_1} - \frac{I_2}{n}$$

Allora il circuito equivalente diventa:



In modo analogo si può ricavare un altro circuito equivalente:

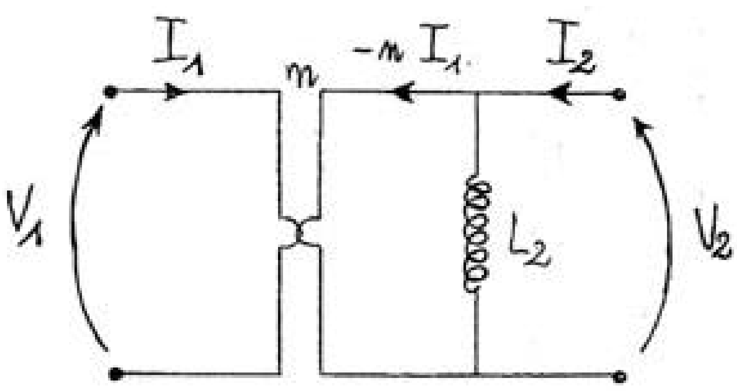
$$R\Phi = N_1 I_1 + N_2 I_2$$

$$I_2 = \frac{R\Phi}{N_2} - \frac{N_1}{N_2} I_1$$

sostituendo $\Phi = \frac{V_2}{jwN_2}$

ed essendo $L_2 = \frac{N_2^2}{R}$

$$I_2 = \frac{V_2}{jwL_2} - nI_1$$



Si rimuove ora l'ipotesi di assenza di flussi dispersi.
La tensione indotta ai capi degli avvolgimenti è data dal flusso magnetico Φ incanalato nel circuito magnetico e dal campo $\vec{B}$ presente nell'aria e creato dalle correnti impresse dall'esterno. Ovvero:

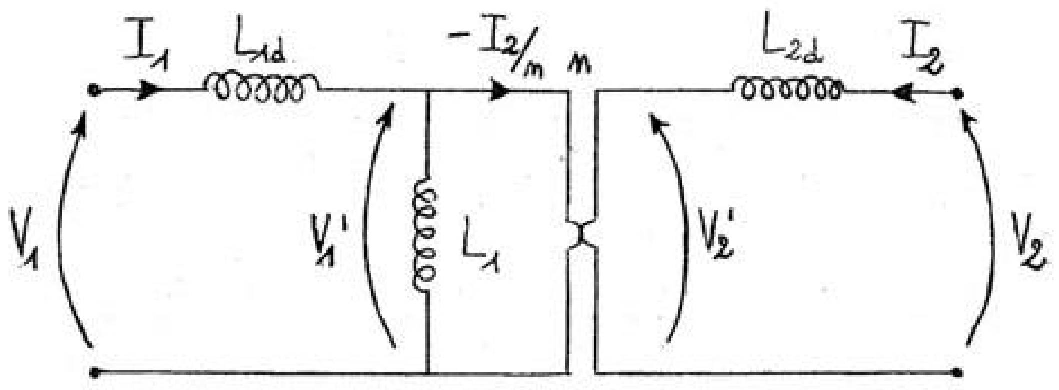
$$\begin{cases} R\Phi = N_1 I_1 + N_2 I_2 \\ V_1 = jwN_1\Phi + jwL_{1d} I_1 \\ V_2 = jwN_2\Phi + jwL_{2d} I_2 \end{cases}$$

$L_{1d}, L_{2d} \rightarrow$ induttanza di dispersione

Ponendo $V_1' = V_1 - jwL_{1d} I_1$ e $V_2' = V_2 - jwL_{2d} I_2$

Si ottengono le stesse equazioni ricavate appena sopra.

Allora il circuito equivalente diventa:



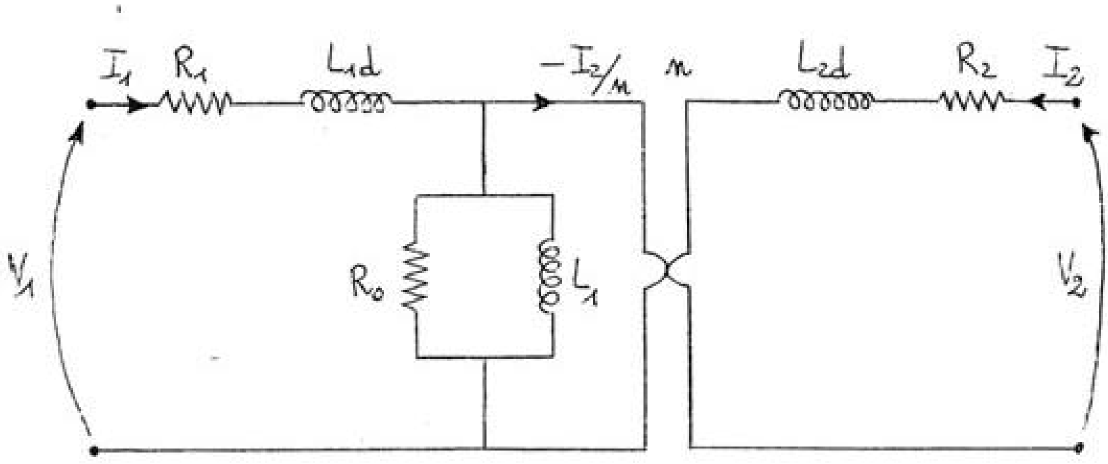
Si rimuove ora l'ipotesi dell'assenza di perdite negli avvolgimenti. La resistivitàdel rame non è dunque nulla, e allora:

$$\begin{cases} R\Phi = N_1 I_1 + N_2 I_2 \\ V_1 = jwN_1\Phi + jwL_{1d} I_1 + R_1 I_1 \\ V_2 = jwN_2\Phi + jwL_{2d} I_2 + R_2 I_2 \end{cases}$$

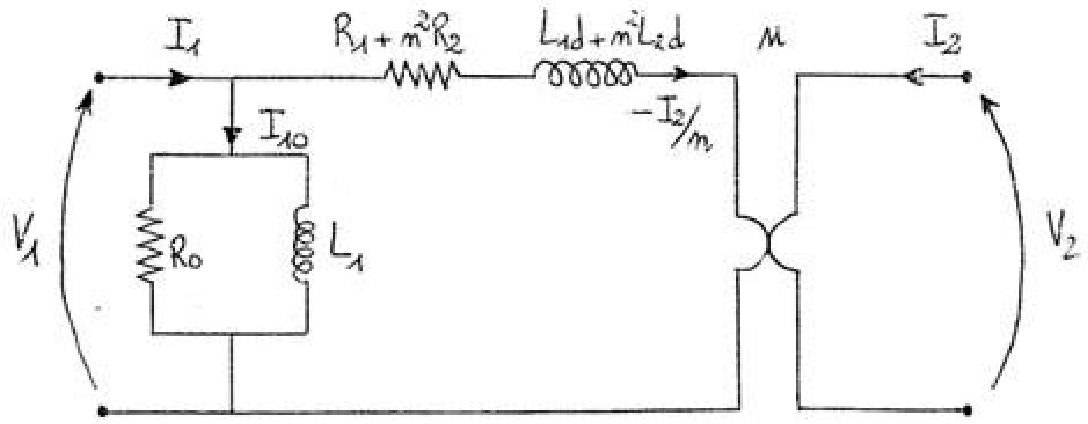
Le resistenze R_1 e R_2 sono ovviamente in serie rispettivamente a L_{1d} e L_{2d}.

Infine, per tenere conto delle perdite nel nucleo ferromagnetico, si inserisca nel modello una resistenza R_0 in parallelo all'induttanza L_1.

Il circuito equivalente del trasformatore reale è pertanto:



Riportando al primario la resistenza e l'induttanza di dispersione dell'avvolgimento secondario ed essendo $I_1 \cong -\frac{I_2}{n}$ si ottiene il circuito equivalente semplificato del trasformatore reale:

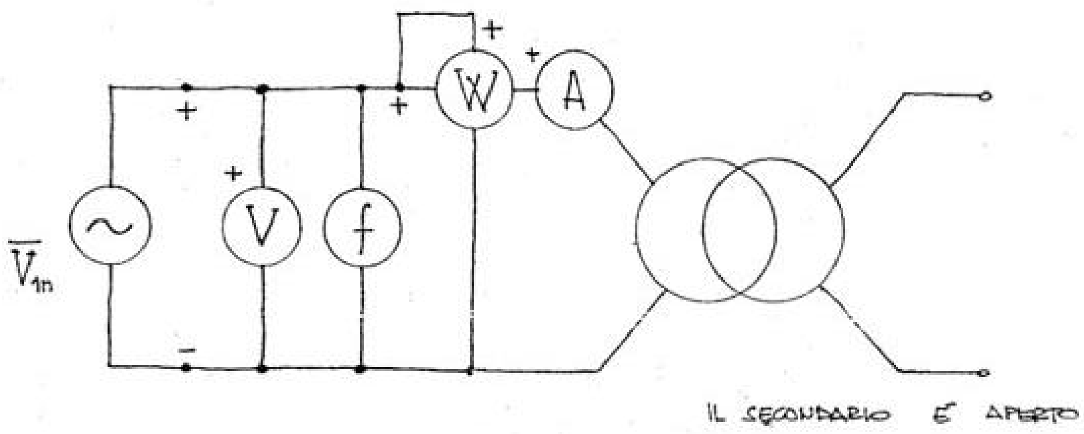


Esso è caratterizzato da quattro parametri:

La resistenza degli avvolgimenti $R_1 + n^2 R_2$
L'induttanza di dispersione $L_{1d} + n^2 L_{2d}$
L'induttanza dell'avvolgimento primario L_1
La resistenza di perdita nel ferro R_0

La determinazione di questi parametri avviene sperimentalmente tramite le prove “a vuoto” e “in cortocircuito”.

1.6 Prova a vuoto



I morsetti del secondario sono in circuito aperto e dunque $I_2 = 0$.
I morsetti del primario sono invece collegati ad un generatore di tensione che fornisce il valore di tensione primaria nominale V_{1n} (ovvero il valore per il quale il trasformatore è stato progettato e realizzato).
Il voltmetro e il frequenzimetro sono utilizzati per verificare che la tensione applicata abbia valore efficace e frequenza corrispondenti ai valori nominali.
L’amperometro e il wattmetro misurano rispettivamente la corrente I_{1o} e la potenza P_{10} assorbita dal trasformatore in queste condizioni di secondario aperto.

Poiché $I_2 = 0$ e dunque $\frac{I_2}{n} = 0$ la corrente misurata dall’amperometro è $I_1 = I_{10}$.

Non essendoci dissipazione di potenza attiva sulla resistenza degli avvolgimenti $R_1 + n^2 R_2$, si ha:

$$P_{10} = G_0 V_{1n}^2$$

dove G_0 è la conduttanza del parallelo tra la resistenza R_0 e l’induttanza L_1. Ovvero

$$G_0 = \frac{1}{R_0}$$

da cui:

$$\boxed{R_0 = \frac{V_{1n}^2}{P_{10}}}$$

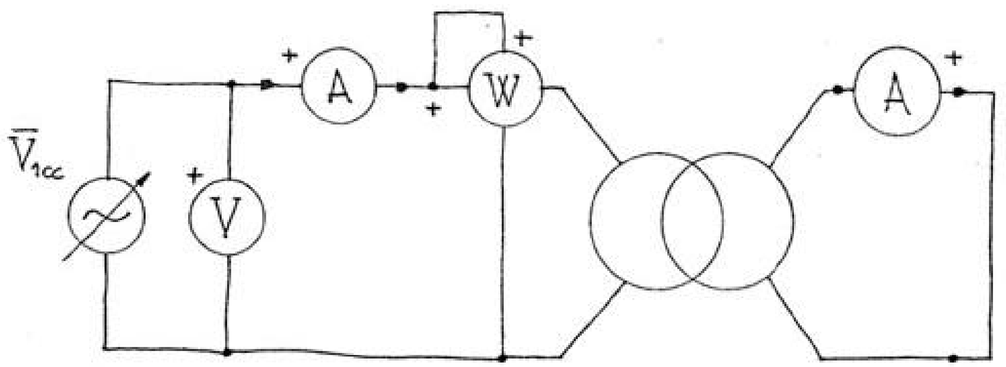
Inoltre:

$$Y_0 = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{jwL_1} = \frac{1}{R_0} - \frac{j}{wL_1}$$

$$|Y_0| = \sqrt{\left(\frac{1}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{wL_1}\right)^2} = \frac{I_{10}}{V_{1n}}$$

$$\boxed{L_1 = \frac{1}{w\sqrt{\left(\frac{I_{10}}{V_{1n}}\right)^2 - \left(\frac{1}{R_0}\right)^2}}}$$

1.7 Prova in cortocircuito



I morsetti del primario sono collegati ad un generatore di tensione che fornisce il valore di tensione primaria necessaria affinché la corrente primaria assuma il suo valore nominale I_{1n}. Di conseguenza anche la corrente secondaria assumerà il suo valore nominale I_{2n}.

Poiché la tensione primaria da applicare V_{1cc} è molto inferiore al valore nominale V_{1n}, la corrente I_{10} è pressoché nulla e dunque la corrente I_{1n} scorre nella resistenza $R_1 + n^2 R_2$ e nell'induttanza $L_{1d} + n^2 L_{2d}$.
Il wattmetro misura la potenza P_{1cc} assorbita dal trasformatore e dissipata da $R_1 + n^2 R_2$, essendo trascurabile la dissipazione di R_0.

$$P_{1cc} = \left(R_1 + n^2 R_2\right) I_{1n}^2$$

da cui:

$$R_1 + n^2 R_2 = \frac{P_{1cc}}{I_{1n}^2}$$

Inoltre

$$Z_{1cc} = \left(R_1 + n^2 R_2\right) + jw\left(L_{1d} + n^2 L_{2d}\right)$$

$$\left|Z_{1cc}\right| = \frac{V_{1cc}}{I_{1n}}$$

$$\frac{V_{1cc}}{I_{1n}} = \sqrt{\left(R_1 + n^2 R_2\right)^2 + w^2\left(L_{1d} + n^2 L_{2d}\right)^2}$$

$$\boxed{L_{1d} + n^2 L_{2d} = \frac{1}{w}\sqrt{\left(\frac{V_{1cc}}{I_{1n}}\right)^2 - \left(R_1 + n^2 R_2\right)^2}}$$

1.8 Esercizio 4

Le prove a vuoto e in cortocircuito su un trasformatore monofase da 10 kVA, 2200/220 V, 50 Hz hanno dato i seguenti risultati:

prova a vuoto eseguita sul lato bassa tensione

V_{2n} = 220 V
V_{1n} = 2200 V
I_{20} = 2,5 A
P_{20} = 100 W

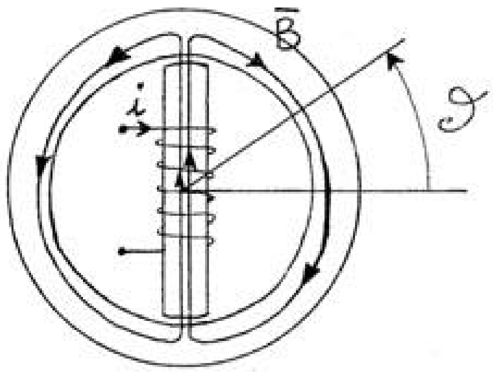
prova in cortocircuito eseguita sul lato alta tensione

$$V_{1cc} = 150 \text{ V}$$
$$I_{1n} = 4{,}55 \text{ A}$$
$$P_{1cc} = 215 \text{ W}$$

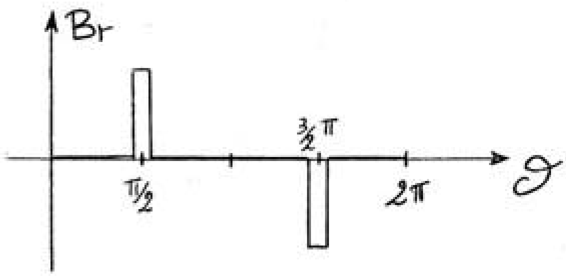
Ricavare i parametri del circuito equivalente riferiti rispettivamente al lato bassa tensione e al lato alta tensione. Ricavare inoltre il rapporto tra la corrente I_{10} e quella nominale I_{1n}, ed infine il fattore di potenza a vuoto e in cortocircuito.

2 Macchine elettriche

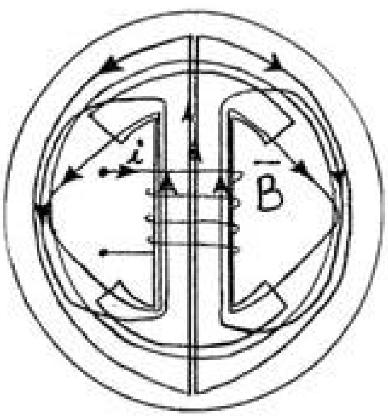
Si consideri il seguente circuito magnetico



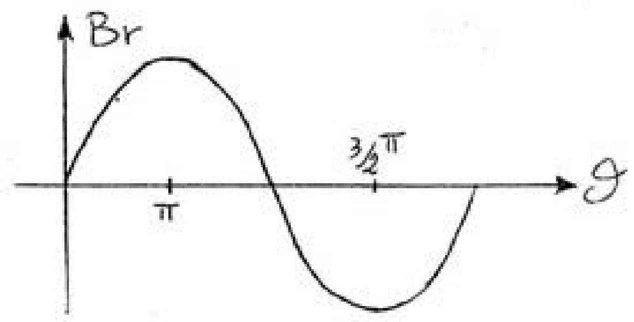
L'andamento della componente radiale del campo $\vec{B}$ lungo il tra ferro è:



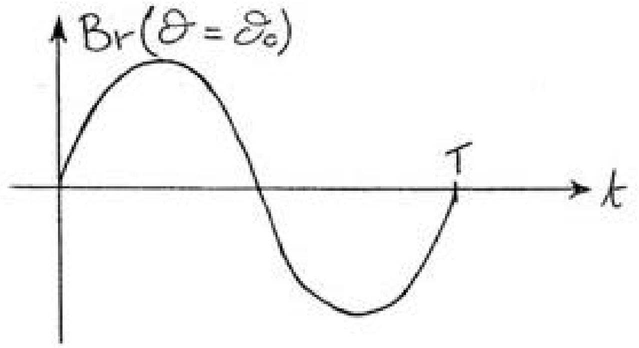
Se invece la forma dell'elemento centrale del circuito magnetico (quello su cui è presente l'avvolgimento) viene opportunamente sagomata fino ad assumere la struttura di un osso, ovvero:



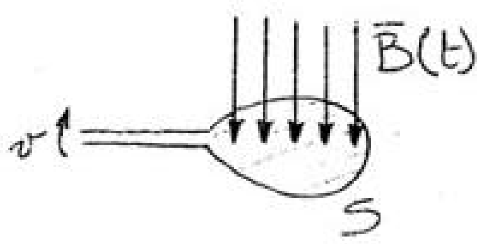
La componente radiale del campo $\vec{B}$ lungo il tra ferro assume un andamento sinusoidale



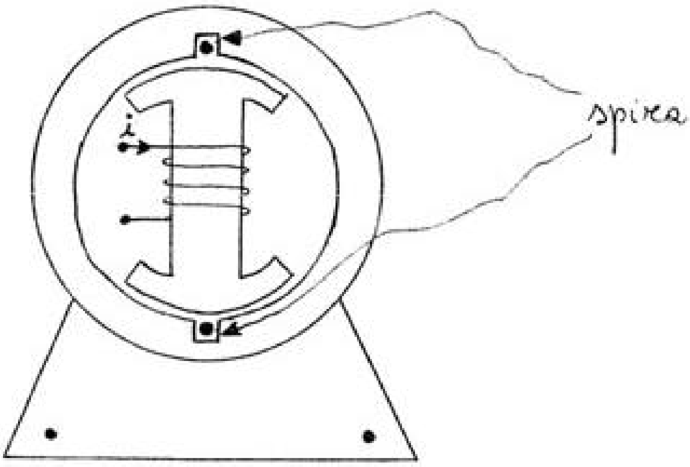
Se l'elemento centrale ruota si genera quello che viene definito campo magnetico rotante, ovvero in un punto fissato del tra ferro, per esempio J_0, la componente radiale del campo $\vec{B}$ non è più costante nel tempo, ma ha un andamento sinusoidale:



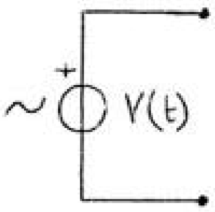
Si era visto che ai capi di una spira, posta in una zona in cui è presente un campo $\vec{B}$ variabile nel tempo, si crea una differenza di potenziale uguale alla variazione nel tempo del flusso magnetico attraverso la superficie della spira stessa.



Ponendo allora una spira sul circuito magnetico considerato (si veda la figura) ai suoi capi è disponibile una differenza di potenziale.
Essendo $\vec{B}$ sinusoidale lo è anche la differenza di potenziale ai capi della spira.

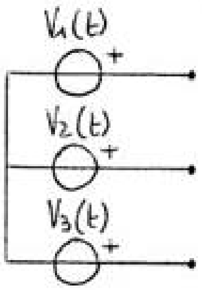


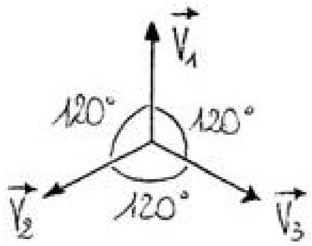
Ciò significa che abbiamo realizzato un generatore di tensione sinusoidale a partire da una corrente i continua:



La parte di circuito magnetico a forma di osso su cui vi è l'avvolgimento in cui scorre la corrente i, ovvero la parte di circuito magnetico che ruota, viene chiamata ROTORE. Viceversa, la parte di circuito magnetico sul quale viene avvolta la spira ai cui capi è indotta la tensione v è ferma, è solidale con un supporto fisso e viene chiamata STATORE.

Se, invece di inserire una sola spira sullo statore, ne vengono posizionate tre uguali in posizione sfasata di 120° l'una dall'altra, si ottengono ai capi delle tre spire tre tensioni sinusoidali di uguale valore efficace, ma sfasate nel tempo di 120° l'una dall'altra. Si è cioè realizzato un generatore trifase.





Si noti che la struttura di rotore (osso di materiale ferromagnetico e avvolgimento percorso dalla corrente i) altro non è che un elettromagnete.

La struttura realizzata (rotore + statore), sia essa monofase o trifase, è reversibile, ovvero applicando una tensione sinusoidale alla o alle spire di statore viene generato il campo magnetico rotante $\vec{B}$. Il rotore magnetico si comporta come l'ago di una bussola, cioè cerca di inseguire il campo magnetico rotante. Ciò significa che il rotore ruota. Si è dunque realizzata una macchina elettrica che trasforma l'energia elettrica in energia meccanica. In particolare essa viene definita MACCHINA ELETTRICA SINCRONA, perché il rotore ruota alla stessa velocitàdel campo magnetico rotante.

Si consideri ora la stessa struttura vista in precedenza, ma anziché alimentare con una corrente continua i l'avvolgimento di rotore, si chiuda questo avvolgimento in cortocircuito. Gli avvolgimenti di statore sono identici al caso precedente e dunque creano il campo magnetico rotante che induce una corrente sinusoidale nell'avvolgimento di rotore.
Detta corrente crea a sua volta un altro campo magnetico rotante, questa volta di rotore. L'interazione tra il campo magnetico rotante di statore e il campo magnetico rotante di rotore pone in rotazione il rotore.
Sia Ω_c la velocitàdi rotazione del campo di statore e quella del campo di rotore. Ω_r dipende dalla coppia resistente agente sull'albero della macchina elettrica. Essa non può però in alcun caso uguagliare Ω_c, in quanto se così fosse il campo magnetico di statore risulterebbe fermo rispetto al campo magnetico di rotore e non potrebbe indurre nessuna corrente nell'avvolgimento di rotore.
Quindi

$$\Omega_r < \Omega_c$$

ovvero il rotore deve ruotare più lentamente rispetto al campo di statore. Per questa ragione una tale struttura viene definita MACCHINA ELETTRICA ASINCRONA.

Per caratterizzare la relazione tra Ω_c e Ω_r si usa lo **scorrimento s**:

$$s = \frac{\Omega_c - \Omega_r}{\Omega_c} \qquad 0 < s \leq 1$$

$s = 0 \rightarrow$ sincronismo
$s = 1 \rightarrow$ rotore bloccato

Valori tipici di s:

$2 \div 3\%$ nelle macchine di grande potenza
$6 \div 7\%$ nelle macchine di piccola potenza