Il Luogo delle Radici

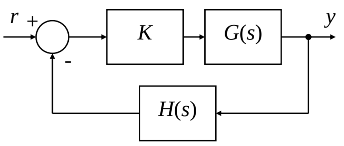
Il luogo delle radici è un procedimento, sostanzialmente grafico, che permette di analizzare come varia il posizionamento dei poli di un sistema di controllo in retroazione al variare di un parametro del sistema stesso.

Di massima il parametro che si fa variare è il guadagno di anello, ma sono possibili anche scelte differenti.

Il metodo del luogo delle radici può essere anche impiegato per realizzare la sintesi del compensatore in quanto permette, con un po’ di pratica, di analizzare il comportamento del sistema ad anello chiuso e di valutare l’effetto di eventuali blocchi aggiuntivi di compensazione.

Il metodo del luogo delle radici può essere impiegato anche con sistemi che risultino instabili ad anello aperto.

Dato il sistema:



$$W(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

i poli di $W(s)$ sono gli zeri di $1+KG(s)H(s)=0$

Tali zeri sono funzioni dei parametri di *G(s), H(s)* e di *K* e possono essere rappresentati come dei punti nel piano complesso.

Qualora un parametro di *G(s), H(s)* o di *K* variasse anche gli zeri varierebbero e si “muoverebbero” sul piano complesso.

Il luogo delle radici è il luogo su cui si muovono, nel piano complesso, gli zeri di $1+KG(s)H(s)=0$ quando K varia tra zero e $+\infty$ (è possibile l’estensione a K negativi).

Risulta

$$1 + KG(s)H(s) = 0$$
$$KG(s)H(s) = -1$$

che può essere trasformata nelle due relazioni seguenti

$$|KG(s)H(s)| = 1$$
$$\angle KG(s)H(s) = 180°$$

la seconda di tali relazioni non dipende da K e descrive il luogo delle radici.

Il luogo delle radici può essere tracciato con MATLAB con il comando:

`rlocus`

per disegnare a mano in modo qualitativo più che quantitativo il luogo delle radici è utile fare riferimento ad alcune regole:

REGOLA 1 - Numero dei rami

Il luogo delle radici ha un numero di rami pari al numero di poli della funzione di trasferimento ad anello aperto $KG(s)H(s)$

Nota bene: eventuali cancellazioni poli-zeri *non* devono essere fatte

REGOLA 2 - Punti di partenza

Per $K=0$ i rami del luogo delle radici partono dai poli della funzione di trasferimento ad anello aperto $KG(s)H(s)$.

REGOLA 3 - Punti di arrivo

Per $K= +\infty$ i rami del luogo delle radici arrivano negli zeri della funzione di trasferimento di anello aperto $KG(s)H(s)$.

Nota bene: se gli zeri al finito di $KG(s)H(s)$ sono meno dei poli, allora all'infinito ci sono N_p-N_z zeri.

REGOLA 4 - Comportamento sull'asse reale.

Fanno parte del luogo delle radici tutti quei punti dell'asse reale che hanno alla loro destra un numero dispari di poli e/o di zeri.

REGOLA 5 - Determinazione del guadagno *K*

Per determinare il valore che assume il guadagno K in un certo punto s_1 del luogo delle radici si usa la relazione

$$K = \left(\frac{1}{|G(s)H(s)|} \right)_{s = s_1}$$

REGOLA 6 - Simmetria del luogo delle radici

Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.

REGOLA 7 - Punti di uscita e di rientro sull'asse reale

I punti di uscita dall'asse reale dei rami del luogo delle radici si trovano in punti a cui corrisponde un massimo relativo del valore di K; i punti di rientro sull'asse reale si hanno in corrispondenza di un minimo relativo del valore di K.

REGOLA 8 - Angoli di uscita e di rientro

Nei punti di uscita dall'asse reale e di rientro su di esso, i rami del luogo delle radici formano un angolo di $180^o/\zeta$ dove ζ è il numero di rami che si incontrano nel punto di uscita o di rientro.

REGOLA 9 - Comportamento asintotico per $K \rightarrow \infty$

Per $K \rightarrow \infty$ i rami del luogo delle radici che tendono all'infinito vi tendono lungo la direzione di asintoti rettilinei individuati dalla loro origine "OA" posta sull'asse reale e dall'angolo A che fanno con tale asse.

$$\mathrm{A} = \frac{180^\circ + n 360^\circ}{N_p - N_z} \quad n = 0,1,\dots,N_p - N_z - 1$$

$$OA = \frac{\sum \text{posizione poli} - \sum \text{posizione zeri}}{N_p - N_z}$$

N_p e N_z sono il numero di poli e di zeri al finito.

REGOLA 10 - Punti di attraversamento dell'asse immaginario

I rami del luogo delle radici attraversano l'asse immaginario in corrispondenza di punti $s_1=j\omega_1$ per cui la fase di $KG(s_1)H(s_1)$ è pari a 180°.

REGOLA 11 - Somma dei valori dei poli ad anello chiuso

Se l'eccesso poli-zeri ($N_p - N_z$) è maggiore di 1, la somma dei valori assunti dai poli della funzione di trasferimento ad anello chiuso è una costante, indipendente da K, pari alla somma dei valori assunti dai poli della funzione di trasferimento ad anello aperto.

REGOLA 12 - Angoli di partenza e di arrivo dai poli e negli zeri complessi coniugati

Per determinare l'angolo di partenza da un polo complesso o di arrivo in uno zero complesso ci si pone su di una circonferenza di raggio infinitesimo attorno al polo o allo zero e si determina quale punto di tale circonferenza soddisfa le condizioni sulla fase di $G(s)H(s)$.

REGOLA 13 - Punti di uscita e di rientro sull'asse reale

I punti di uscita e di rientro sull'asse reale possono essere individuati dalle soluzioni di:

$$\sum_i \frac{1}{s - p_i} - \sum_i \frac{1}{s - z_i} = 0$$

dove p_i e z_i sono i poli e gli zeri di $G(s)H(s)$.

Esempio:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

$$H(s) = (s+3)$$

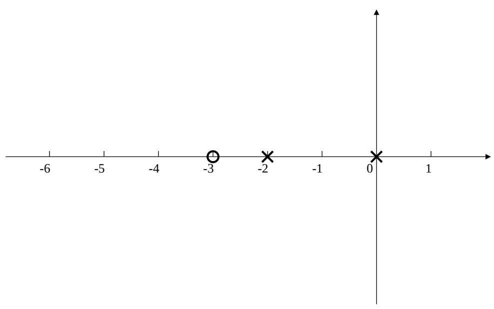
La funzione di trasferimento ad anello aperto è

$$KG(s)H(s) = K\frac{s+3}{s(s+2)}$$

Poli in $s=0$; $s=-2$

Zero in $s=-3$

- ci sono 2 poli e quindi 2 rami del luogo delle radici
- per $K=0$ il luogo delle radici parte dai poli e per $K \to \infty$ tende agli zeri



- $N_p - N_z = 1$ quindi un ramo tende a infinito per $K \to \infty$
- l'asintoto di tale ramo è una retta che ha un angolo $\alpha = 180°/1$ con l'asse reale e quindi è il semiasse reale negativo
- sull'asse reale fanno parte del luogo delle radici i punti tra 0 e -2 e i punti a sinistra di -3

• L’intervallo [0, -2] è delimitato da due poli e quindi avrà almeno un punto di emergenza.

• L’intervallo (-←,-3] è delimitato da due zeri e quindi avrà almeno un punto di ritorno.

Il punto di emergenza si ha in corrispondenza di un massimo di *K*.

Si può calcolare *K* per diversi valori di *s* nell’intervallo [-2,0] usando la relazione

$$K = \frac{1}{|G(s)H(s)|} = \frac{1}{\left|\frac{4\,(s+3)}{3s(s+2)}\right|}$$

Si ottiene la tabella:

s	*K*	
−0,8	0,3273	
−0,9	0,3536	
−1,0	0,3750	
−1,1	0,3908	
−1,2	0,4000	
−1,3	0,4015	⇑ *uscita*
−1,4	0,3938	

Il punto di uscita è spostato verso sinistra rispetto al centro dell’intervallo che sarebbe il punto di emergenza con solo 2 poli.

Lo zero in -3 “attira verso di se” il luogo delle radici.

Gli angoli di emergenza sono 180º/9 in quanto si incontrano due rami.

Per il punto di rientro:

s	*K*	
−4,5	5,6250	
−4,6	5,6062	
−4,7	5,5985	⇑ *rientro*
−4,8	6,6000	

Anche in questo caso gli angoli tra i rami sono di 90°

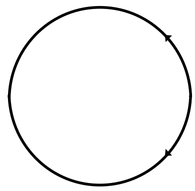
Si possono ricavare i punti di uscita e di rientro analiticamente (regola 13)

$$\frac{1}{s+0}+\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}=$$
$$=\frac{(s+2)(s+3)+s(s+3)-s(s+2)}{s(s+2)(s+3)}=0$$

Il numeratore risulta $s^2+6s+6=0$ da cui:

$$s=-3\pm\sqrt{3}$$

in accordo con quanto già determinato.



In questo caso particolarmente semplice si possono determinare i poli del sistema ad anello chiuso in funzione di *K*.

Si ha

$$W(s)=\frac{KG(s)}{1+KG(s)H(s)}$$

Sostituendo e sviluppando i calcoli si ottiene

$$W(s)=\frac{12K}{3s^2+2(3+2K)s+12K}$$

I poli ad anello chiuso sono in

$$s_{1,2}=\frac{-(2K+3)\pm\sqrt{(2K+3)^2-36K}}{3}$$

I valori di *K* per cui si hanno radici reali e coincidenti sono quelli per cui:

$(2K+3)^2-36K=0$ e quindi $4K^2-24K+9=0$

da cui

$$K_{1,2}=3\pm\frac{3}{2}\sqrt{3}\approx\begin{cases}0,4\\5,6\end{cases}$$

Osservazioni:

A) se lo zero venisse avvicinato al polo in -2 la parte circolare del luogo delle radici rimpicciolirebbe.

B) al contrario se si allontanasse lo zero (verso $-\infty$) la parte circolare si ingrandirebbe.

C) anche i punti di uscita e di rientro si sposterebbero.

D) se lo zero coincidesse (quasi) con il polo in -2 il sistema ad anello avrebbe un polo “fisso” in -2.

Esempio:

$$G(s)H(s)=\frac{1}{s(s-2)}$$

Il luogo delle radici ha due rami che partono dai poli ad anello aperto e vanno all'infinito perché l’eccesso poli zero è due.

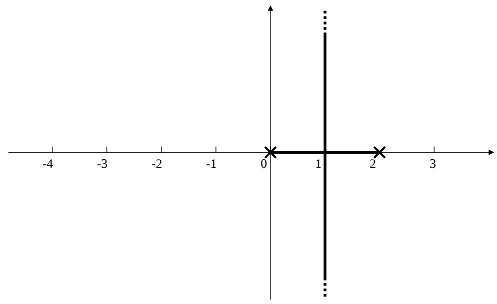
Gli asintoti sono due individuati da:

$A = \pm 90°$

$$OA = \frac{\sum(\text{posizione poli}) - \sum(\text{posizione zeri})}{N_p - N_z} =$$

$$= \frac{0+2}{2} = 1$$

Il luogo delle radici è:



Il punto di emergenza dal segmento [0, 2] può essere trovato cercando per punti il massimo di K

$$K = \frac{1}{|G(s)H(s)|} = \frac{1}{\left|\frac{1}{s(s-2)}\right|} = |s(s-2)|$$

Si ricava la seguente tabella

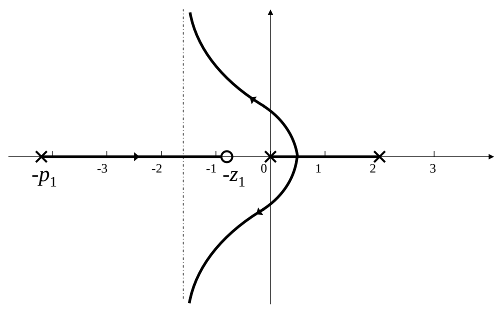
s	K	
0,8	0,96	
0,9	0,99	
1,0	1,00	⇐ uscita
1,1	0,99	
1,2	0,96	

Il punto di emergenza può essere ricavato analiticamente:

$$\frac{1}{s+0} + \frac{1}{s-2} = \frac{(s-2)+s}{s(s-2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad s = 1$$

Supponiamo di aggiungere un compensatore in serie costituito da una rete derivatrice con polo e zero in $-p_1$ e $-z_1$ rispettivamente.

Il luogo delle radici risulta qualitativamente il seguente.



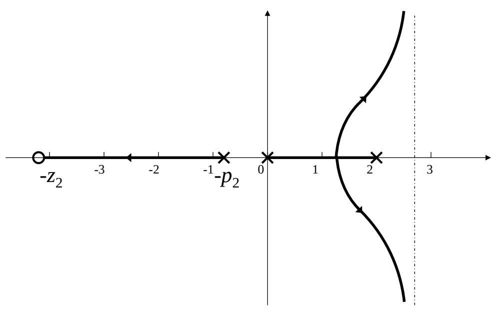
Gli asintoti sono individuati da

$$A = \pm 90°$$

$$OA = \frac{(0+2-p_1)-(-z_1)}{3-1} = \frac{2-p_1+z_1}{2} = 1-\frac{(p_1-z_1)}{2}$$

Si vede che per opportuni p_1, z_1 e K il sistema può essere reso stabile e si può anche cercare di avere dei poli ad anello chiuso sufficiente smorzati e veloci.

Se il compensatore in serie fosse una rete integrativa con polo e zero $-p_2$ e $-z_2$ tali che $|p_2| < |z_2|$ allora il luogo delle radici risulterebbe:



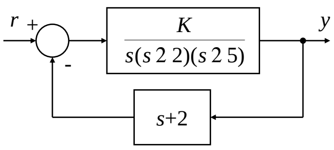
L'origine degli asintoti è in:

$$OA = \frac{(0+2-p_2)-(-z_2)}{3-1} = \frac{2-p_2+z_2}{2} = 1+\frac{z_2-p_2}{2}$$

e il sistema non risulta stabilizzabile.

Cancellazione Polo-Zero

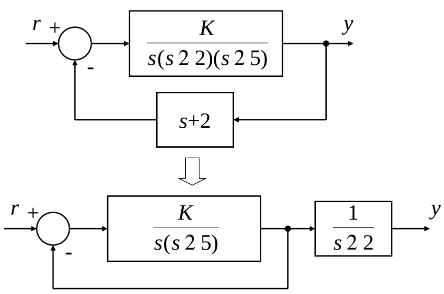
Dato il sistema



La funzione di trasferimento ad anello chiuso è

$$W(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+5)+K(s+2)} = \frac{K}{(s+2)[s(s+5)+K]}$$

Con gli schemi a blocchi



Il sistema retroazionato ha il polo in -2 !

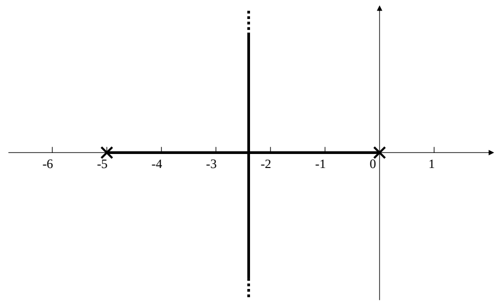
© Gustavo Belforte 1999

Se si procede alla cancellazione polo-zero prima di tracciare il luogo delle radici si ottiene:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+5)}$$

si traccia quindi il luogo delle radici e si ha

© Gustavo Belforte 1999



© Gustavo Belforte 1999

L'origine degli asintoti è:

$$OA = \frac{-5}{2} = -2{,}5$$

ma in realtà bisognerebbe considerare anche polo e zero (cancellati) in -2.

Con questi:

$$OA = \frac{(-2-5)-(-2)}{2} = -2{,}5$$

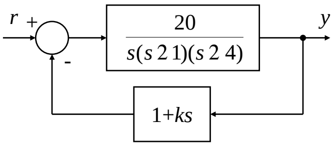
© Gustavo Belforte 1999

Il luogo delle radici non risulta modificato se si aggiunge la coppia polo-zero in -2 salvo che per la presenza di *un polo fisso* in - 2 che va aggiunto sul grafico precedente.

© Gustavo Belforte 1999

Luogo delle Radici Quando Varia un Parametro Diverso dal Guadagno di Anello.

Esempio:



© Gustavo Belforte 1999

Si ha:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{20(1+ks)}{s(s+1)(s+4)} = 0$$

che sviluppata ha il seguente numeratore

$$s^3 + 5s^2 + 4s + 20 + 20ks = 0$$

posto $20k=K$ si ottiene:

$$-Ks = s^3 + 5s^2 + 4s + 20$$

Che può essere posta nella forma:

$$-\frac{Ks}{s^3+5s^2+4s+20}=1$$

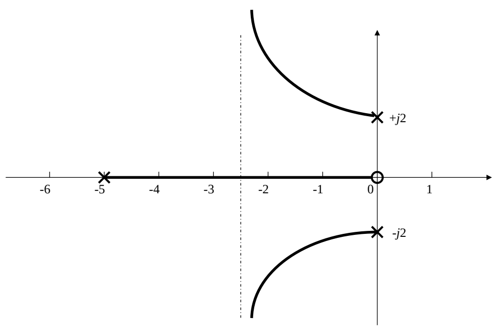
o anche:

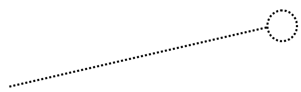
$$1+\frac{Ks}{s^3+5s^2+4s+20}=0$$
$$1+\frac{Ks}{(s+j2)(s-j2)(s+5)}=0$$

Il luogo delle radici di questa funzione risulta uguale a quello della funzione originaria al variare di *k*.

Tale luogo ha 3 rami di cui due vanno all'infinito con asintoti definiti da:

$$\mathrm{A} = \pm 90°$$
$$OA = \frac{-5-(-0)}{2} = -2{,}5$$





Angolo di partenza dal polo:

$$90° - 90° - 21{,}8° - \varphi = 180°$$
$$\varphi = -180° - 21{,}8° = -158{,}2°$$