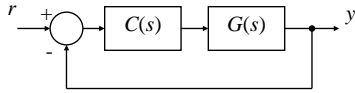




Compensatore in serie

Si vuole realizzare un sistema di controllo del tipo



$$W/s0 \mid \frac{y/s0}{r/s0} \mid \frac{C/s0G/s0}{12 C/s0G/s0} \mid \frac{F/s0}{12 F/s0}$$



In questo schema $G(s)$ rappresenta il sistema dato e $C(s)$ rappresenta un eventuale blocco aggiuntivo che deve essere progettato in modo tale che il sistema rappresentato da $W(s)$ soddisfi opportune specifiche.

$G(s)$ è assunto stabile (può tuttavia avere poli multipli nell'origine).



Specifiche

- errori di posizione, velocità ecc. definiti
- astatismo a disturbi polinomiali
- fedeltà di riproduzione (errore di regime permanente)
- pulsazione di taglio o banda
- margine di fase o picco in frequenza
- attenuazione alte frequenze

E' conveniente tradurre queste specifiche per il sistema di controllo in richieste sulla funzione di trasferimento ad anello aperto $F(s)$.



Errori di posizione, velocità ecc.

Questa specifica si traduce nelle seguenti richieste su $F(s)$:

- deve avere un certo numero di poli nell'origine
- il guadagno di anello (di $F(s)$) deve essere tale per cui K_{pos} , K_{vel} ... soddisfino la specifica

Nota che spesso K_{pos} è indicato con K_p e K_{vel} con K_v .



Poli in zero	Errore posizione	Errore velocità	Errore accelerazione
0	$\frac{1}{12 K_{pos}}$	←	←
1	0	$\frac{1}{K_{vel}}$	←
2	0	0	$\frac{1}{K_{acc}}$



Esempio 1

Si vuole un errore di posizione $\Omega 2\%$ allora:

- se $F(s)$ non ha poli in zero

$$\tilde{e}_{pos} \mid \frac{1}{12 K_{pos}} \Omega 0,02 \heartsuit K_{pos} / 210 \emptyset 50$$

- se $F(s)$ ha poli in zero,

$$\tilde{e}_{pos} \mid 0$$

la specifica è soddisfatta



Esempio 2

Si vuole un errore di velocità nullo.

Allora:

$F(s)$ deve avere almeno 2 poli in zero.



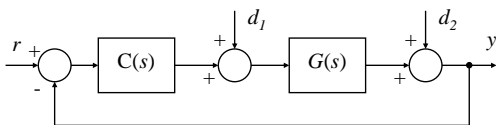
Astaticismo ai disturbi polinomiali

Anche questa specifica si traduce in un vincolo sul numero di poli in zero che $F(s)$ deve avere.

Il sistema è astatico a un disturbo polinomiale di grado n che entra nella catena diretta se nei blocchi a monte del disturbo ci sono almeno $n+1$ poli in zero.



Esempio



Si chiede l'astatismo a d_1 e d_2 costanti.

$$G/s0| \frac{s^2 z_1}{s/s^2 p_1 0}$$

E' necessario che in $C(s)$ ci sia un polo in zero per l'astatismo a d_1 costante.



Fedeltà di riproduzione

Con questa specifica si chiede che i segnali fino ad una pulsazione ω_x assegnata siano riprodotti fedelmente con un errore minore di una soglia $x\%$ assegnata.

Questa richiesta si traduce in un vincolo sul modulo di $F(j\omega)$.



Infatti

$$\varepsilon \Omega x\% \text{ per } \omega \Omega \omega_x$$

implica

$$|W_e/j\omega0| \Omega x\% \text{ per } \omega \Omega \omega_x$$

$$\frac{1}{|12 F/j\omega0|} \Omega \frac{x}{100} \heartsuit |12 F/j\omega0| \oslash \frac{100}{x}$$

quindi

$$|F/j\omega0| \oslash \frac{100}{x} \text{ per } \omega \Omega \omega_x$$

perché in generale x è piccolo e quindi $|F(j\omega)| \gg 1$.



Esempio:

Si richiede che i segnali (sinusoidali) di frequenza fino a 5 rad/s siano riprodotti con errore $\Omega 2,5\%$

$$\frac{1}{|12 F/j\omega0|} \Omega 0,025 | \frac{1}{40}$$

da cui

$$|F/j\omega0| \oslash 40 \text{ per } \omega \Omega 5.$$

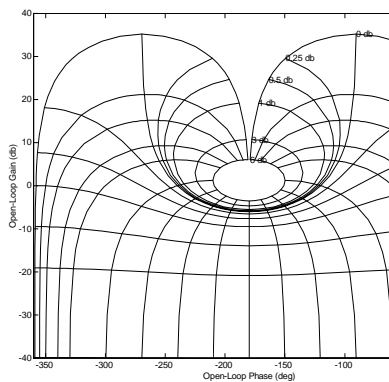


Pulsazione di taglio o banda

La pulsazione di taglio ω_c è già una specifica su $F(s)$.

Se viene assegnata la banda ω_B essa può essere tradotta in pulsazione di taglio con la relazione approssimata

$$\omega_c \approx 0.4 \div 0.8 \omega_B$$



Infatti

$$y \approx \Omega x \% \text{ per } \omega \ll \omega_x$$

implica

$$\left| \frac{W}{j\omega} \right| \approx \frac{x}{100} \text{ per } \omega \ll \omega_x$$

$$\frac{|F/j\omega|}{|12 F/j\omega|} \approx \frac{|F/j\omega|}{100}$$

perché $|F(j\omega)| \ll 1$



Margine di fase o picco

Il margine di fase è già una specifica su $F(s)$.

Se viene assegnato il picco M_p questo può essere tradotto (in modo approssimato) in un margine di fase.



Attenuazione alle alte frequenze

Con questa specifica si chiede che i segnali (sinusoidali) in ingresso per le pulsazioni superiori ad un valore ω_x assegnato siano attenuati sotto una soglia $x\%$.

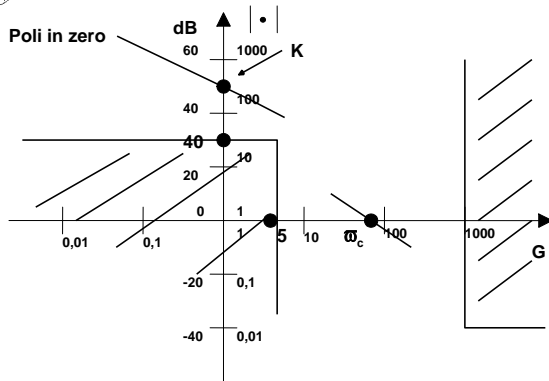
Questa richiesta si traduce in un vincolo sul modulo di $F(j\omega)$.



Esempio:

Si richiede che i segnali sinusoidali sopra i 1000 rad/s siano attenuati sotto 1%

$$\frac{|F/j\omega|}{|12 F/j\omega|} \approx 0,01 \quad \forall \quad |F/j\omega| \approx 0,01$$



Compensatori possibili

- guadagno (o attenuazione)
- rete integratrice (ritardatrice)
- rete derivatrice (anticipatrice)
- reti a più celle



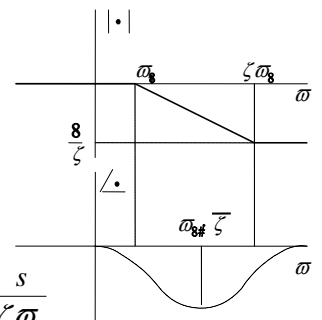
Guadagno

- realizzato con amplificatori
- non modifica il diagramma della fase di $F(j\omega)$
- non modifica la forma del diagramma del modulo di $F(j\omega)$, ma lo alza o lo abbassa



Rete integratrice

- realizzata con reti (sistemi) dinamiche
- non modifica il modulo di $F(j\omega)$ a bassa frequenza; attenua ad alta frequenza

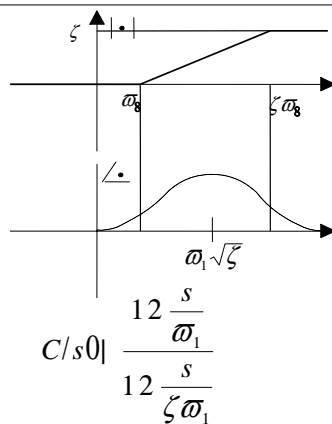


$$C/s0| \frac{12 \frac{s}{\omega_1}}{12 \frac{s}{\zeta \omega_1}}$$



Rete derivatrice

- realizzata con reti (sistemi) dinamiche
- non modifica il modulo di $F(j\omega)$ a bassa frequenza; amplifica ad alta frequenza
- alza la fase tra ω_1 e $\zeta \omega_1$



$$C/s0| \frac{12 \frac{s}{\omega_1}}{12 \frac{s}{\zeta \omega_1}}$$



Reti a più celle

E' sempre possibile realizzare reti a più celle. Tra le reti a più celle, le integroderivatrici sono costituite da una cella integratrice ed una derivatrice.



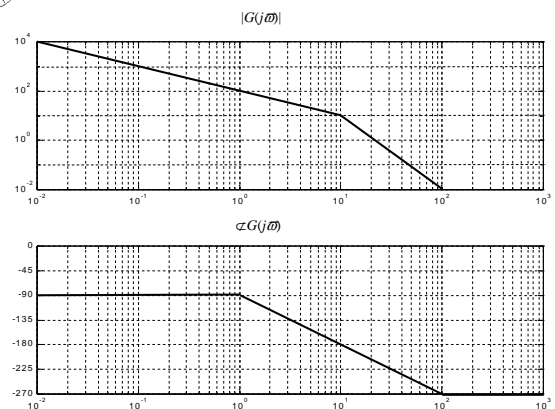
Compensazione con rete integratrice

Dato il sistema

$$G(s) = \frac{10^4}{s^2 2 \cdot 10^2} \left| \frac{100}{s} \right|$$

Specifiche richieste

- margine di fase $m_\pi \approx 45^\circ$

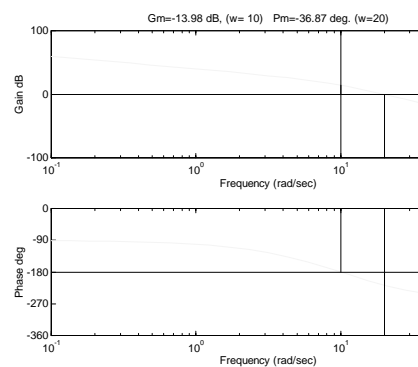


La pulsazione di taglio risulta

$$\frac{100}{\omega_c} \left| \frac{\omega_c^2}{100} \right| = 1 \Rightarrow \omega_c \approx 21,5$$

La fase

- dal grafico $\approx 4 \cdot 212 / m_\pi \approx 32^\circ$
- calcolata $\approx 4 \cdot 220 / m_\pi \approx 40^\circ$



La specifica sulla fase non è soddisfatta, anzi il sistema ad anello chiuso risulta instabile.

Dal diagramma approssimato della fase si vede che la fase vale -135° ($m_\pi = 45^\circ$) attorno a $\omega \approx \sqrt{10} \approx 3,16$



Per punti si calcola la fase

ω	φ
$\sqrt{10} \approx 3,16..$	$\heartsuit 4125^\circ$
4	$\heartsuit 4133,6^\circ$
4,5	$\heartsuit 4138,5^\circ$
4,2	$\heartsuit 4135,6^\circ$
4,1421	$\heartsuit 4135^\circ$



Per $\omega = 4,2$ si ha che

$$\left| G/j\omega \right| \approx \frac{100}{\omega} \Big|_{\omega=4,2} \approx 23,8$$

(Usando la formula approssimata del modulo)

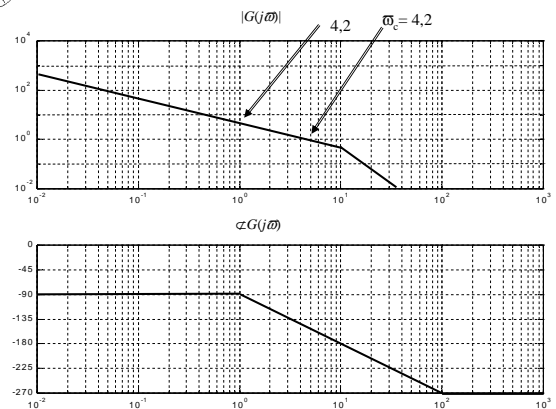
Il valore esatto (con Matlab)

$$\left[\begin{array}{l} |G| \\ \angle G \end{array} \right] \Big|_{\omega=4,2} \approx \left[\begin{array}{l} 20,24 \\ 4135,56^\circ \end{array} \right]$$

Se quindi aggiungiamo al sistema un compensatore costituito da un guadagno

$$K \Big|_{K=23,8} \approx 0,042$$

soddisfiamo la specifica sul margine di fase.



Si può vedere che l'errore di velocità e la fedeltà di risposta risultano peggiori per il sistema compensato di quanto non fossero originariamente (fatti salvi i problemi di stabilità).



Una rete integratrice con $\zeta \Big|_{\zeta=0,042} \approx \frac{1}{K} \Big|_{K=23,8} \approx 0,042$ e con sia polo che zero a pulsazioni più basse di $\omega_c=4,2$ otterrebbe lo stesso risultato per il margine di fase ma non altererebbe l'errore di velocità pur di essere a frequenze "basse".

La ragione per cui la rete compensatrice va messa a frequenze "basse" è perchè così non abbassa la fase in ω_c .

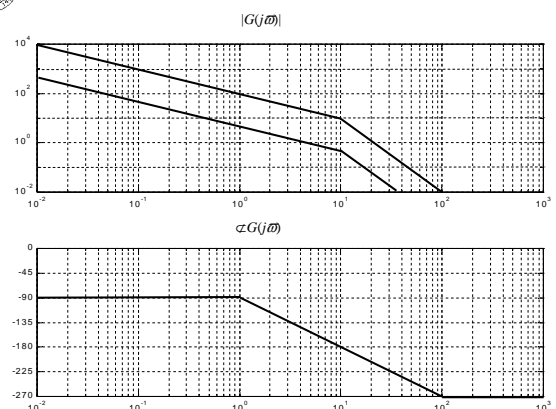


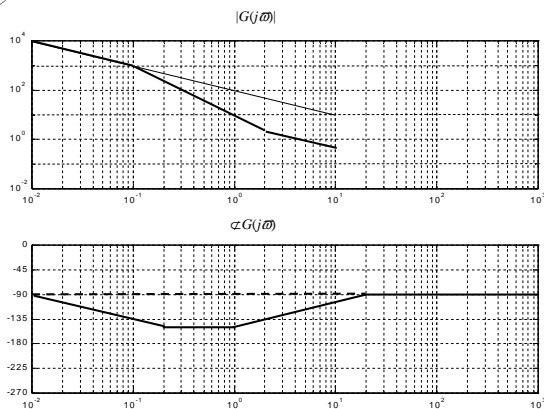
Tuttavia si potrebbe anche scegliere un valore maggiore di ζ . Con ciò ω_c risulterebbe spostata verso il basso (sinistra)

Però la rete compensatrice potrebbe essere spostata verso l'alto (destra).

In definitiva dobbiamo determinare

$$\omega_1, \zeta, \omega_c$$





Se si ponesse $\omega_c | 4,2 | 10 \zeta \omega_1$
 $\zeta \omega_1 | 0,42$

e con

$$\zeta | 23,8 \heartsuit \omega_1 | 0,0176$$

il compensatore sarebbe

$$C/s | \frac{12 s / 0,42}{12 s / 0,0176}$$

che ha fase in $\omega_c = 4,2$: $\alpha C(j \omega_c) = -5,47^\circ$

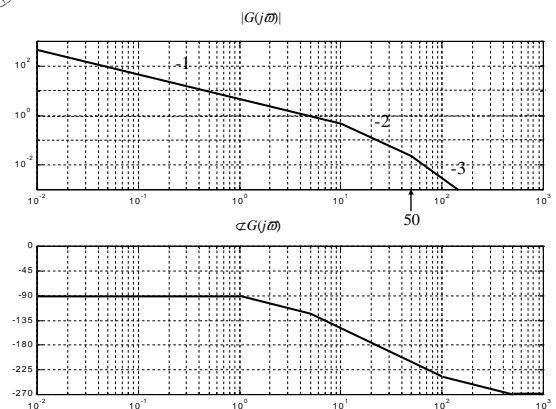


Altro Esempio

$$G/s | \frac{2500}{s/s \ 2 \ 100/s \ 2 \ 500} | \frac{5}{s_{TM} \ 2 \ \frac{s}{10} \ \left| \frac{R}{TM} \ 2 \ \frac{s}{50} \right|}$$

Specifiche richieste

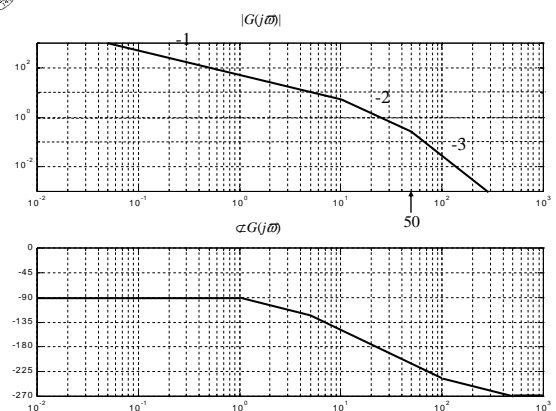
- errore di velocità $\Omega 2\%$ ($K_v \ \Omega 50$)
- margine di fase $m_\pi \ \Omega 45^\circ$



Per soddisfare la specifica sull'errore di velocità non c'è altro modo che alzare il diagramma del modulo di 10 con un guadagno.

Un primo compensatore è quindi $C'(s)=10$.

Tale compensatore non altera il diagramma della fase.





Prima di introdurre il compensatore, la pulsazione di taglio era $\omega_c = 5$ a cui corrisponde una fase di $-122,3^\circ$.

Dopo l'introduzione del compensatore si ha

$$|CG/j\omega|_{\omega=\omega_c} \approx \frac{50}{\omega_c \frac{\omega_c}{10}} \approx 1 \quad \omega_c = 22,4$$

a cui corrisponde una fase di $-180,1^\circ$.



Dal grafico si vede che tale pulsazione esiste ed è tra 5 e 10

ω	φ
5	$-122,28^\circ$
8	$-137,75^\circ$
7	$-132,96^\circ$
7,2	$-133,95^\circ$



Se vogliamo usare una rete integratrice per compensare il sistema, dobbiamo verificare che ci sia una pulsazione più bassa dell'attuale ω_c ($\omega_c = 22,4$) a cui la fase sia quella che si vorrebbe avere alla pulsazione di taglio.



A tale pulsazione il modulo vale

$$|CG/j\omega|_{\omega=7,2} \approx \frac{50}{7,2} \approx 6,94$$

(con MATLAB si ha 5,578)

Si è così determinato un limite superiore per la pulsazione di taglio che deve essere $\omega < 7,2$.

Si ha anche un limite inferiore per il valore di ζ che deve essere $\zeta > 1/5$;



Occorre trovare i valori da assegnare a ω_1 , ζ e ω_c affinché il sistema risulti opportunamente compensato con una rete integratrice

$$|CG/s|_{\omega=\omega_c} \approx \frac{12 \frac{s}{\zeta \omega_1}}{12 \frac{s}{\omega_1}}$$

La rete va posizionata in modo tale che ω_1 e $\zeta \omega_1$ siano minori di ω_c .

Per ciò bisogna avere tre relazioni che leghino ω_1 , ζ e ω_c e che permettano quindi di determinarli.



La funzione (approssimata) del modulo in ω_c fornisce una prima relazione tra le tre grandezze ω_1 , ζ e ω_c .

Risulta $|CG/s|_{\omega=\omega_c} \approx 1$

$$\left| \frac{\omega}{\zeta \omega_1} \frac{\omega_1}{\omega} \right|_{\omega=\omega_c} \approx \left| \frac{1}{\zeta} \frac{50}{\omega_c} \right| \approx 1$$

e quindi $\omega_c = 50/\zeta$



La funzione che permette di determinare la fase alla pulsazione di taglio è una seconda relazione che lega ω_1 , ζ e ω_c .

Tale funzione viene valutata numericamente per punti.



Occorre una terza relazione.

Possiamo scegliere:

- di assegnare il rapporto $\omega_c/(\zeta\omega_1)$ viene assegnato
- di imporre il valore di ζ
- di minimizzare l'attenuazione alle frequenze medie



Se si impone il valore di ζ dalla relazione approssimata del modulo si ottiene ω_c .

Nel nostro caso $\omega_c \approx 50/\zeta 5$

Assegnato ζ , possiamo trovare per tentativi quel tale ω_1 per cui la fase alla pulsazione di taglio è quella desiderata (nel nostro caso -135°) occorre inizializzare la ricerca con un ω_1 "ragionevole" che può essere ricavato assumendo $\zeta\omega_1 = \omega_c/10$.



$\zeta \mid 7$	♥	$\omega_c \mid 7,14$
ω_1		π_{ω_c}
0,1		4 138,46°
0,02		4 134,63°
0,04		4 135,59°
0,03		4 135,11°



$\zeta \mid 10$	♥	$\omega_c \mid 5$
ω_1		π_{ω_c}
0,1		4 132,44°
0,15		4 137,26°
0,13		4 135,36°



$\zeta \mid 15$	♥	$\omega_c \mid 3,33$
ω_1		π_{ω_c}
0,13		4 140,34°
0,10		4 134,76°
0,11		4 136,69°
0,102		4 135,15°



$\zeta 20$	♥	$\omega_c 2,5$
ω_1		π_{ω_c}
0,10		4 143,27°
0,08		4 137,69°
0,07		4 134,54°



Se si specifica il rapporto

$$\frac{\omega_c}{\zeta \omega_1} | \eta$$

(il valore $\eta = 10$ è un buon valore) si ha che

$$\zeta \omega_1 | \frac{1}{\eta} \omega_c$$

e dalla relazione (approssimata) del modulo si ha ζ in funzione di ω_c

(nel nostro caso $\zeta \neq 50 / \omega_c$)



E' possibile quindi fissare un valore di ω_c e ricavare ζ , ω_1 , $\zeta \omega_1$ e π_{ω_c}

Partendo da un valore ragionevole di ω_c è quindi agevole trovare, per approssimazioni successive, il valore di ω_c a cui corrisponde il π_{ω_c} voluto.

$\eta | 10$

ω_c	ζ	ω_1	$\zeta \omega_1$	π_{ω_c}
7	7,1429	0,098	0,70	4 137 ,87 °
6,8	7,3529	0,0925	0,68	4 136 ,89 °
6,4	7,81	0,0819	0,64	4 134 ,89 °



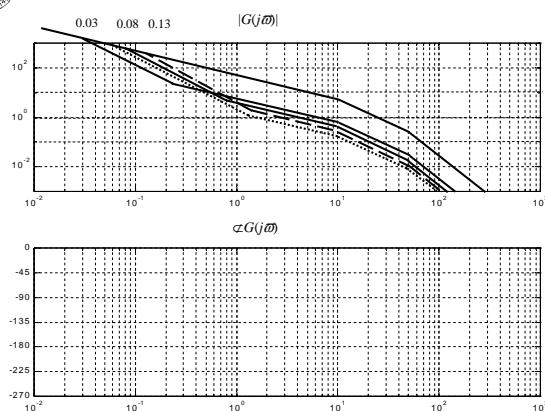
Per minimizzare l'attenuazione alle medie frequenze bisogna massimizzare ω_1 .

Per fare ciò si ripete uno degli altri metodi visti per più valori e si sceglie la soluzione che massimizza ω_1 .



Dai dati già raccolti si ha

ζ	ω_1	ω_c
7	0,03	7,1429
7,81	0,0819	6,4
10	0,13	5
15	0,102	3,33
20	0,07	2,5





Compensazione con Rete Derivatrice

Dato il sistema

$$G/s0 \left| \frac{100}{s/s \ 2 \ 100} \right| \left. \frac{10}{s \left(\frac{R}{C} \right) 2 \frac{s}{10}} \right\}$$

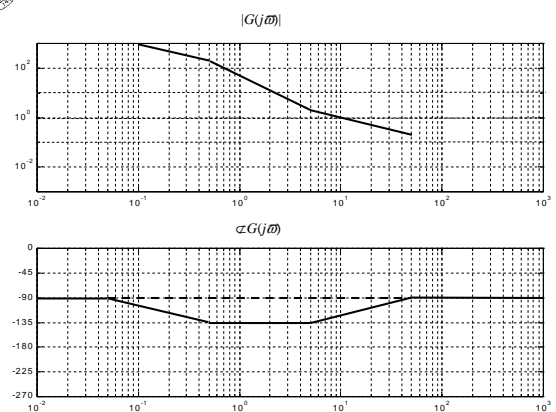
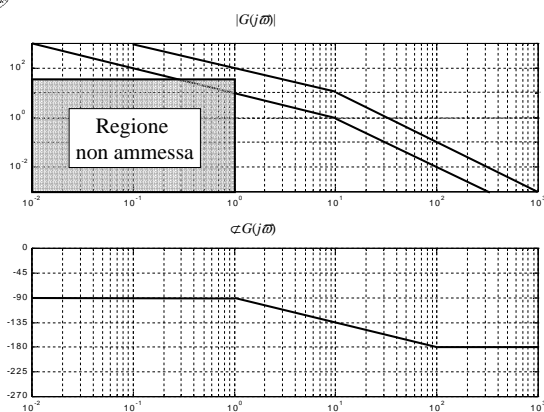
Specifiche richieste:

- errore di velocità $\Omega 1\%$ ($K_v \ \Omega 100$)
- margine di fase $m_\pi \ \Omega 45^\circ$
- errore di regime permanente $\Omega 2\%$ per ingressi (sinusoidali) con pulsazione $\varpi \Omega 1$



Per soddisfare la prima specifica è indispensabile aggiungere un primo compensatore $C'=10$

Però allora non viene più soddisfatta la seconda specifica e a ciò non si può rimediare con una rete integratrice a motivo della terza specifica sull'errore di regime permanente.



In questo caso si può usare un compensatore derivativo che non altera l'andamento del modulo alle basse frequenze, ma permette di alzare la fase alla pulsazione di taglio.

Per avere il massimo risultato conviene che la pulsazione di taglio del sistema compensato sia in $\sqrt{\zeta} \ \varpi_1$ in quanto a tale pulsazione la rete derivatrice dà il massimo incremento di fase.



Di quanto viene alzata la fase?

In $\sqrt{\zeta} \ \varpi_1$ la rete derivatrice dà un incremento di fase che è legato a ζ dalla relazione

$$A_{\max} \left| \arcsin \frac{\zeta 4}{\zeta 2} \right|$$

e la relazione inversa è

$$\zeta \left| \frac{12 \sin A_{\max}}{14 \sin A_{\max}} \right|$$



Tornando all'esempio,

dato

$$|C\mathcal{G}/s| \left[\frac{100}{s \left(2 \frac{s}{10} \right)} \right]$$

si ricava la ω_c da

$$|C\mathcal{G}/s|_{s=j\omega_c} \left[\frac{100}{\omega_c} \right]_{\omega_c} \left[\frac{1000}{\omega_c^2} \right]_{\omega_c} = 1$$

$$\omega_c \approx 31,6 \text{ rad/s}$$



La fase in

$$\omega = 31,6 \text{ rad/s}$$

vale

$$-162,5^\circ \quad \Delta m_\pi = 17,5^\circ$$

e quindi si devono recuperare

$$45^\circ \Delta 17,5^\circ = 27,5^\circ$$



Si come l'introduzione di una rete derivatrice sposta la pulsazione di taglio verso l'alto (perchè amplifica le alte frequenze) il margine di fase da recuperare alla nuova pulsazione di taglio sarà maggiore di $27,5^\circ$.

Come tentativo fissiamolo a 30° .



Per recuperare 30° si deve avere

$$\zeta \left[\frac{12 \sin 30^\circ}{14 \sin 30^\circ} \right] \left[\frac{1,5}{0,5} \right] \approx 3$$

Il sistema verrà compensato aggiungendo il compensatore

$$C\mathcal{G}| \frac{12 \frac{s}{\omega_1}}{12 \frac{s}{\zeta \omega_1}}$$



Per determinare ω_1 si usa la relazione (approssimata) che fornisce il modulo alla pulsazione di taglio.

Risulta

$$|C\mathcal{G}|_{s=j\omega_c} \left[\frac{|s|}{\omega_1} |C\mathcal{G}/s|_{s=j\omega_c} \right]_{\omega_c} = 1$$

$$\left[\frac{\omega_c}{\omega_1} \frac{100}{\omega_c} \right]_{\omega_c} \left[\frac{1000}{\omega_1 \omega_c} \right]_{\omega_c} = 1$$



Tale relazione va usata assieme al vincolo

$$\omega_c = \sqrt{\zeta} \omega_1$$

Quindi

$$\begin{cases} \left[\frac{\omega_1 \omega_c}{\omega_1} \right]_{\omega_c} = 1000 \\ \left[\frac{\omega_c}{\sqrt{3} \omega_1} \right]_{\omega_c} = 3 \end{cases} \quad \heartsuit \quad \begin{cases} \left[\frac{\omega_1}{\omega_c} \right]_{\omega_c} = \frac{1000}{\omega_c} \\ \left[\frac{\omega_c}{\sqrt{3} \omega_1} \right]_{\omega_c} = 24,03 \\ \left[\frac{\omega_c}{\omega_1} \right]_{\omega_c} = 41,6 \end{cases}$$



Il compensatore $C''(s)$ risulta

$$C''(s) = \frac{12 \frac{s}{24}}{12 \frac{s}{72}}$$

alla pulsazione $41,6$ la fase risulta $-136,48^\circ$
($m_\pi = 43,5^\circ$)

Facendo i conti per questo compensatore con Matlab si ha

$$\omega_c = 40,83 \quad m_\pi = 43,76^\circ$$



Diagrammi Universali

Servono per il progetto e il calcolo di reti compensatrici.

Sono diagrammi normalizzati del modulo e della fase di una famiglia di reti derivatrici (ma possono esser usati anche per reti integratrici).



Con un'altra iterazione in cui si aumentasse la fase da recuperare oppure si aumentasse direttamente ζ si potrebbero soddisfare le richieste.

Nota bene

In altri casi in cui la fase variasse molto alle pulsazioni subito superiori alla pulsazione di taglio del sistema non compensato potrebbe non essere possibile recuperare la fase con una sola cella.



Per usare i grafici per una cella integrativa descritta da

$$\frac{12 \frac{j\omega v}{m}}{12 j\omega v}$$

basta cambiare segno alle ordinate della fase e del modulo (i moduli sono espressi in dB)



L'uso dei diagrammi può essere riassunto nei seguenti passi:

- si decide quale elemento della famiglia debba essere usato e quindi si sceglie m ($\zeta = m$).
- si posiziona la rete, cioè si definisce un punto opportuno del diagramma universale (individuato da un valore di ωv) e si stabilisce a quale pulsazione del sistema da controllare tale punto debba corrispondere.

In tal modo si determina ϑ

**Esempio**

Dato il sistema

$$G/s0| \frac{10}{s \left(\frac{R}{TM} \right) 2 \frac{s}{10} \left(\frac{R}{TM} \right) 2 \frac{s}{10}}$$

Specifiche richieste:

- errore di velocità $\Omega 1\%$ ($K_v \varnothing 100$)
- margine di fase $m_\pi \varnothing 45^\circ$
- errore di regime permanente $\Omega 2\%$ per ingressi (sinusoidali) con pulsazione $\varpi \Omega 1$



Tale sistema è già stato studiato.

Si è visto che occorre imporre nel compensatore un guadagno 10 per soddisfare la prima specifica ($K_v \varnothing 100$) e poi una rete derivatrice per alzare la fase alla pulsazione di taglio in modo da soddisfare la specifica sul margine di fase senza violare la specifica sull'errore per ingressi sinusoidali.



Dai diagrammi di Bode di $G(s)$ (o dai calcoli) si vede che occorre alzare la fase di circa 30° .

Possiamo quindi scegliere $m = 3$.

Dai diagrammi universali vediamo che il massimo della fase si ha per $\varpi \vartheta \approx 1,7$ e che per tale valore il modulo viene alzato di $\sim 5dB$.



Il grafico di $C'G(s)$ scende a $-5dB$ ($\sim -0,56$) per $\varpi = 40-50$

Impongo quindi $\varpi \vartheta \approx 1,7$ per $\varpi \approx 45$ e ricavo

$$\vartheta \approx 1,7 / 45 \approx 0,0377$$

In tal modo ho imposto che il massimo del recupero della fase si abbia alla pulsazione di taglio.

La rete è determinata.



Per maggiore sicurezza avrei potuto scegliere $m=4$, $\varpi \vartheta = 1$ per $\varpi = 30$, e quindi

$$\vartheta \approx 1 / 30 \approx 0,033$$

Comunque alla fine del progetto si deve verificare che il sistema compensato soddisfi effettivamente tutte le specifiche

**Esempio**

$$G/s0| \frac{5}{s \left(\frac{R}{TM} \right) 2 \frac{s}{10} \left(\frac{R}{TM} \right) 2 \frac{s}{50}}$$

Specifiche richieste

- errore di velocità $\Omega 2\%$ ($K_v \varnothing 50$)
- margine di fase $m_\pi \varnothing 45^\circ$



Tale sistema è già stato studiato.

Si è visto che nel compensatore vi deve essere un guadagno di 10 per soddisfare la specificità sull'errore di velocità ($K_v \approx 50$).

Poi si può usare una rete integratrice per soddisfare la specifica sul margine di fase.

Tale rete va dimensionata.



Se $\omega\vartheta$ è molto grande il modulo è di

$$41,8 \text{ dB} \approx \frac{1}{7,94}$$

Siccome $|G(j\omega)| \approx 7,9$ per $\omega \approx 6,3$ dove la fase vale $-129,3$ allora si può accettare un aumento ulteriore di $5-6$ gradi.

$5-6$ gradi si hanno per $\omega\vartheta \approx 85$. Pongo quindi $\omega\vartheta = 85$ per $\omega \approx 6,3$ da cui

$$\vartheta \approx \frac{85}{6,3} \approx 13,5$$



Sia dato il sistema:

$$G(s) = \frac{10}{s^2 \left(2 + \frac{s}{10} \right)}$$

con specifiche:

- errore di velocità $\Omega 1\%$ ($K_v \approx 100$)
- margine di fase $m_\pi \approx 45^\circ$
- errore di regime permanente $\Omega 2\%$ per ingressi (sinusoidali) con pulsazione $\omega \approx 1$ rad/sec
- attenuazione sotto il 5% per ingressi (sinusoidali) con pulsazione $\omega \approx 100$ rad/sec



Dal diagramma di Bode di $C'G(s)$ si ricava (calcoli già fatti) che occorre un'attenuazione di almeno $1/7$, pari a -17 dB .

Dai diagrammi universali scelgo $m=8$ in quanto la curva corrispondente mi consente l'attenuazione voluta.

Dal grafico di $G(s)$ si nota che per $\omega \approx 7$, dove il modulo vale ≈ 7 , la fase è già quasi di -135° .

Quindi la rete integratrice può dare un contributo allo sfasamento di pochissimi gradi, cioè si ha solo per $\omega\vartheta$ molto grande.



Compensazione con Rete Integroderivatrice

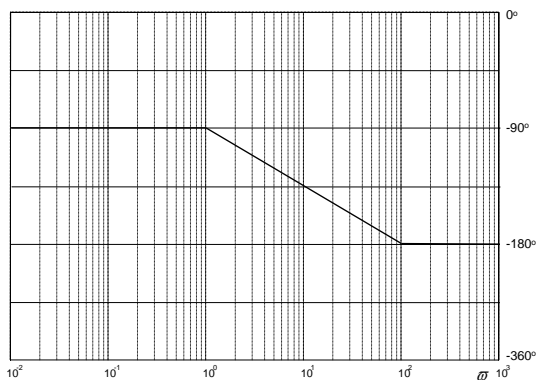
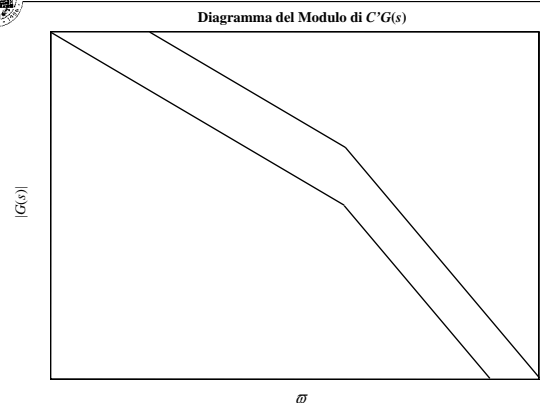
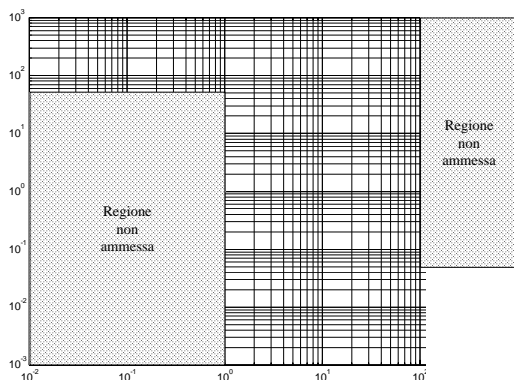
Ci sono casi in cui non si possono soddisfare tutte le specifiche di progetto né con una rete integrativa né con una rete derivativa.

In questi casi una rete integroderivativa può risolvere il problema.



Al solito la prima specifica può essere soddisfatta unicamente con l'aggiunta di un compensatore $C'=10$.

Il grafico di $C'G(s)$ risulta quello di figura.



Come già visto le prime tre specifiche su errore di velocità, margine di fase ed errore di regime permanente per ingressi sinusoidali possono essere soddisfatte con un'ulteriore rete derivatrice che però violerebbe la quarta specifica sull'attenuazione alle alte frequenze.

Un'ulteriore rete integratrice permetterebbe invece di soddisfare le prime due specifiche su errore di velocità e margine di fase e la quarta sull'attenuazione alle alte frequenze, ma non la terza sull'errore di regime permanente per ingressi sinusoidali.



Che cosa si può fare con una rete integroderivatrice?

La rete integratrice permette di abbassare il diagramma del modulo alle alte frequenze in accordo con quanto richiesto per soddisfare la quarta specifica.

Però deve essere posizionata in modo tale da non violare la terza specifica e quindi abbassa la fase alla pulsazione di taglio.

La rete derivatrice deve recuperare il margine di fase richiesto senza violare la quarta specifica.



Posizionamento della Rete di Compensazione

Il polo della rete integratrice va posizionato il più a sinistra possibile.

Si impone che tale polo posto in ω_g faccia passare il diagramma del modulo al limite della regione proibita dalla terza specifica.



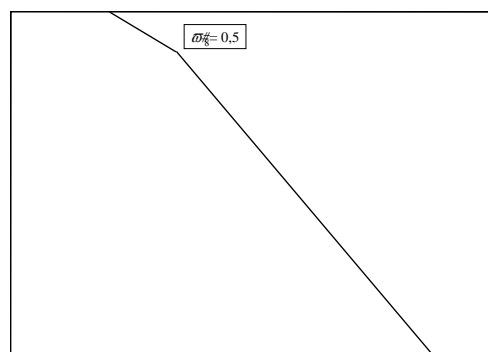
Si ha:

$$\left| \frac{1}{12} \frac{C\mathcal{G}}{j\omega} \right|_{\omega=1} \approx \left[\frac{1}{\omega} \right]_{\omega=1}^{100} \quad |$$

♣

polo della rete | 100
integratrice | 50

$$\omega_1 | 0,5$$



Il posizionamento dello zero (e quindi il calcolo di ζ_1) viene tralasciato per il momento.

In proposito però si nota:

1. lo zero potrà essere posto in prossimità della pulsazione di taglio in modo tale da aumentare il margine di fase.



2. siccome in $\omega = 100$ si ha:

$$\left| \frac{C\mathcal{G}}{j\omega} \right|_{\omega=100} \approx \left[\frac{100}{\omega} \right]_{\omega=100} \quad | 0,1$$

allora $\zeta_1 \approx 2$ perché in $\omega \approx 100$ il modulo deve essere $\approx 0,05$.

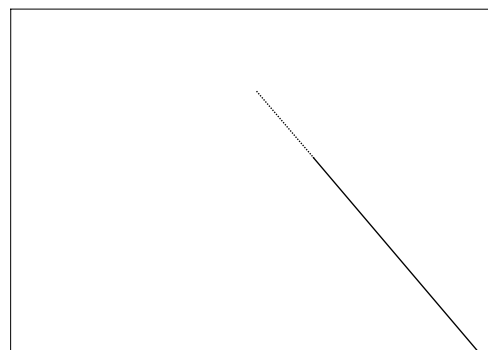
tuttavia se $\zeta_1 = 2$ il margine di fase risulterebbe minore di 45° e non si potrebbe recuperarlo con una rete derivatrice (perché alzerebbe il modulo in $\omega = 100$).



Per quanto riguarda la rete derivatrice si osserva che questa va posta nei pressi della pulsazione di taglio (a cavallo della pulsazione di taglio) per contribuire al meglio al margine di fase.

Il polo della rete derivatrice sarà certamente a una pulsazione inferiore a $\omega = 100$ per contribuire all'attenuazione a tale pulsazione.

In $\omega = 100$ quindi il sistema compensato avrà la stessa pendenza del sistema non compensato in quanto poli e zeri del compensatore saranno tutti a pulsazioni più basse.





Resta ora da posizionare polo e zero della rete derivatrice nonché lo zero della rete integratrice in modo da raccordare i grafici già determinati relativi agli andamenti a bassa e ad alta frequenza.

Siccome tale raccordo determina la pulsazione di taglio, visto che per garantire il margine di fase più alto possibile è necessario che la pendenza media all'intorno di ω_c sia la più bassa possibile, questo viene ottenuto raccordando i due tratti a pendenza -2 con uno a pendenza -1.



E' quindi necessario che dei due zeri da posizionare uno sia in -10 in corrispondenza del polo di $G(s)$.

Nota bene

- cancellazione polo-zero stabili
- si rende non osservabile una variabile interna



Il sistema risulta quindi

$$C/s0G/s0 \left| \frac{12 \frac{s}{\omega_2} \left(\frac{12 \frac{s}{10} \left(\frac{100}{s_{TM}^2} \frac{s}{0,5} \right) \right)}{12 \frac{s}{\zeta_2 \omega_2} \left(\frac{12 \frac{s}{0,5} \left(\frac{100}{s_{TM}^2} \frac{s}{10} \right) \right)} \right|$$

$$\left| \frac{12 \frac{s}{\omega_2} \left(\frac{100}{s_{TM}^2} \frac{s}{0,5} \right)}{12 \frac{s}{\zeta_2 \omega_2} \left(\frac{100}{s_{TM}^2} \frac{s}{0,5} \right)} \right|$$



Dato il vincolo $|C/s0G/s0|_{\omega=100} | 0,05$ segue:

$$\zeta_2 \frac{100}{\omega \frac{\omega}{0,5}} \Big|_{\omega=100} | 0,05 \quad \heartsuit \quad \zeta_2 0,005 | 0,05$$

quindi:

$$\zeta_2 | 10$$



Resta da fissare ω_2 che può essere scelta in modo da massimizzare il margine di fase.

Il modulo approssimato in ω_c vale

$$|C/j\omega_0G/j\omega_0|_{\omega=\omega_c} \approx \frac{100}{\omega_c} \left(\frac{\omega_c}{\omega_2} \right) \left| \frac{50}{\omega_c \omega_2} \right| 1$$

da cui $\omega_c | \frac{50}{\omega_2}$



Si può calcolare la tabella seguente:

ω_2	ω_c	α (°)	m_π
3	16,67	4127,54°	52,46°
4	12,5	4122,8°	57,2°
5	10	4125,02°	54,98°
6	8,33	4130,23°	49,77°

