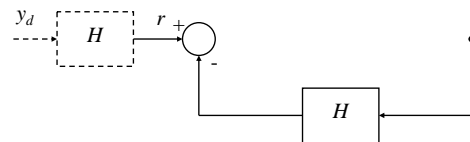


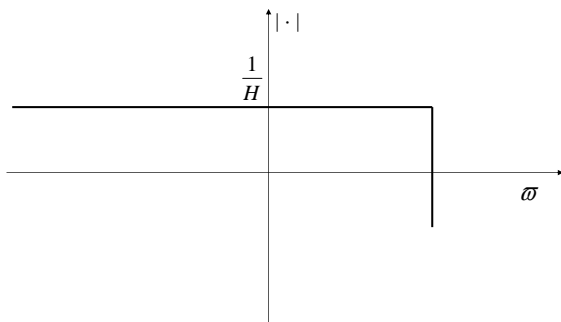
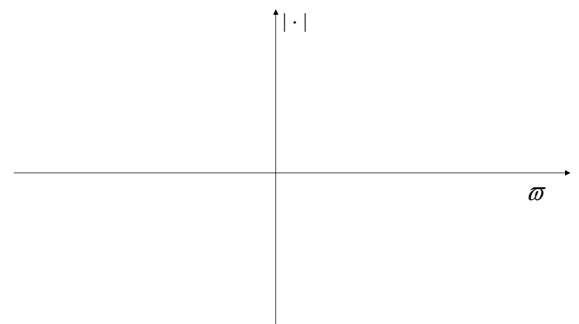
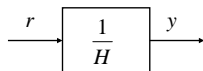


### Fedeltà della Risposta dei Sistemi Dinamici in Catena Chiusa



$$r(t) = y_d(t) - H y(t)$$

$$e'(t) = y_d(t) - H y(t)$$



$$y_d(t) = \frac{1}{H} r(t)$$

e quindi

$$e(t) = \frac{1}{H} r(t) - y(t)$$

trasformando secondo Laplace

$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + H C(s)G(s)} R(s)$$



$$|y/s0| = \frac{1/H}{1/H C/s0 G/s0} |r/s0|$$

e quindi se  $|HC(s)G(s)| \gg 1$  allora

$$|W/s0| \approx \frac{1}{H}$$

e anche

$$|e/s0| \approx \frac{1}{H} |r/s0|$$



Si può ricavare la funzione di trasferimento che lega il segnale in ingresso  $r$  all'errore  $e$ .

Si ha

$$e/s0 = \frac{1}{H} |r/s0| \left( \frac{1}{1 + HC(s)G(s)} \right) |r/s0|$$



$$|W_e/s0| = \frac{1}{H(12 HC/s0 G/s0)} |r/s0|$$

$$|W_e/s0| = \frac{1/H}{12 HC/s0 G/s0} |r/s0|$$

e quindi

$$|W_e/s0| = \frac{1/H}{12 F/s0}$$

dove  $F(s) = HC(s)G(s)$ .



Dal diagramma a blocchi iniziale si ha che

$$e/s0 = \frac{1}{12 HC/s0 G/s0} |r/s0|$$

$$|e/s0| = \frac{1}{12 F/s0} |r/s0|$$

e quindi

$$|e/s0| = \frac{1}{H} |e/s0|$$



### Cause di Errore di Risposta nei Sistemi Dinamici

A) Intrinseca differenza tra la funzione di trasferimento desiderata e quella vera

$$y_d/t0 = \frac{1}{H} |r/t0|$$

B) Presenza di disturbi che agiscono sul sistema (*disturbi additivi*)

C) Errori e incertezze nei parametri del modello



### Risposta di Regime Permanente

Dato un sistema dinamico lineare invariante con uscita  $y(t)$ , la **risposta di regime permanente** ad un dato ingresso è

$$\bar{y} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$$

Posto che tale limite esista e non dipenda dalle condizioni iniziali  $x(0)$ .



L'evoluzione dello stato risulta

$$x(t) = x(0)e^{At} + \int_0^t e^{A(t-\vartheta)} B u(\vartheta) d\vartheta$$

da cui

$$y(t) = C x(t) + C e^{At} x(0) + \int_0^t C e^{A(t-\vartheta)} B u(\vartheta) d\vartheta$$

Siccome  $C e^{A(t-\vartheta)} B = g(t-\vartheta)$ , ne segue

$$y(t) = C e^{At} x(0) + \int_0^t g(t-\vartheta) u(\vartheta) d\vartheta$$

$y(t)$  è costituita di due termini di cui solo il primo dipende da  $x(0)$  e rappresenta l'evoluzione libera del sistema.



Tale termine tende a zero per  $t \rightarrow +\infty$  solo se il sistema risulta asintoticamente stabile.

Quindi, affinché vi sia regime permanente, occorre che il sistema sia stabile.

In tali condizioni

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ C e^{At} x(0) + \int_0^t g(t-\vartheta) u(\vartheta) d\vartheta \right] \\ &= \int_0^{\infty} g(t-\vartheta) u(\vartheta) d\vartheta \end{aligned}$$



### Risposta di Regime Permanente per Ingressi Polinomiali

Dato

$$u(t) = \frac{t^k}{k!}$$

si ha

$$u(t) = \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{t^{k+2}}{(k+2)!} + \dots + \frac{t^{k+i}}{(k+i)!} + \dots$$

La risposta di regime permanente è

$$\bar{y}(t) = \int_0^{\infty} g(t-\vartheta) \left( \frac{\vartheta^k}{k!} + \frac{\vartheta^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{\vartheta^{k+2}}{(k+2)!} + \dots + \frac{\vartheta^{k+i}}{(k+i)!} + \dots \right) d\vartheta$$



$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= \int_0^{\infty} \frac{\vartheta^k}{k!} g(\vartheta) d\vartheta + \int_0^{\infty} \frac{\vartheta^{k+1}}{(k+1)!} g(\vartheta) d\vartheta + \dots \\ &= C_0 \frac{t^k}{k!} + C_1 \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} + C_2 \frac{t^{k+2}}{(k+2)!} + \dots + C_k \frac{t^k}{k!} \end{aligned}$$

dove i coefficienti sono

$$C_i = \int_0^{\infty} \frac{\vartheta^i}{i!} g(\vartheta) d\vartheta$$



Particolarizzando si ottiene

$$C_0 = \int_0^{\infty} g(\vartheta) d\vartheta$$

ricordando che

$$G(s) = \int_0^{\infty} g(\vartheta) e^{-s\vartheta} d\vartheta$$

segue

$$C_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \Psi(s) \beta_0$$



$$C_1 = 4 \int_0^{\infty} \vartheta g(\vartheta) d\vartheta$$

Siccome

$$\frac{d}{ds} G(s) = - \int_0^{\infty} \vartheta g(\vartheta) e^{-s\vartheta} d\vartheta$$

allora

$$C_1 = \left. \frac{d}{ds} G(s) \right|_{s=0}$$

In generale

$$C_i = \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i}{ds^i} G(s) \right|_{s=0}$$



Se  $G(s)$  ha uno zero nell'origine con molteplicità  $\geq 3$  allora  $C_i=0$  per  $i < 3$

Segue che per gli ingressi del tipo

$$u(t) \sim \frac{t^k}{k}$$

se  $k < 3$  la risposta di regime permanente è nulla

se  $k = 3$  la risposta di regime permanente è costante

se  $k > 3$  la risposta di regime permanente è un polinomio di grado  $k-3$



### Ingressi Sinusoidali.

L'uscita e l'errore di regime permanente sono delle sinusoidi

$$e/s \sim W_e/s \quad r/s \sim W_r/s \quad W_e/s \sim \frac{1/H}{12 F/s}$$



Se  $W_e(s)$  ha uno zero di molteplicità  $\geq 3$  nell'origine

se  $k \geq 3$   $e/t \sim 0$

se  $k = 3$   $e/t \sim \text{cost.}$

se  $k < 3$   $e/t \sim$  è un polinomio in  $t$   
di grado  $k-3$



### Errore di Regime Permanente.

il sistema deve essere stabile

ingressi definiti

sinusoidi

polinomi



### Ingressi Polinomiali

$$r(t) \sim \frac{t^k}{k!} \quad r/s \sim \frac{1}{s^{k+1}}$$

$$e(t) \sim C_0 \frac{t^k}{k!} + C_1 \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} + \dots + C_k$$

dove

$$C_i = \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i}{ds^i} W_e/s \right|_{s=0}$$



### Sistemi di tipo $k$

Un sistema di controllo si dice di tipo  $k$  se per un ingresso polinomiale di grado  $k$  il corrispondente errore di regime permanente  $e/t$  è una costante.



Affinché un sistema di controllo sia di tipo  $k$  occorre che  $W_e(s)$

$$W_e(s) \sim \frac{1/H}{12 F(s)} \sim \frac{1/H}{12 H C(s) G(s)}$$

abbia uno zero di molteplicità  $k$  in zero.

A tale fine occorre che  $F(s)$  abbia un polo di molteplicità  $k$  in zero.



Infatti se

$$H C(s) G(s) \sim \frac{1}{s^k} H C'(s) G'(s)$$

dove  $C'(s), G'(s)$  non hanno né poli né zeri nell'origine, dato l'ingresso

$$r(t) \sim \frac{t^3}{3} \quad \Rightarrow \quad r(s) \sim \frac{1}{s^4}$$

per il teorema del valore finale risulta:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{s} \right)^{r(s)} W_e(s)$$



$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^3} \left( \frac{1/H}{12 H C'(s) G'(s)} \right) \sim \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^3} \left( \frac{1/H}{s^k 2 H C'(s) G'(s)} \right)$$

e quindi:

- se  $3 < k$  il limite è zero
- se  $3 = k$  il limite è una costante



Errore di posizione

$r(t) = \text{gradino}$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \frac{1/H}{12 H C(s) G(s)} \sim C_0 \lim_{s \rightarrow 0} W_e(s) \sim \frac{1/H}{12 \lim_{s \rightarrow 0} H C(s) G(s)} \sim \frac{1/H}{12 K_{pos}}$$

$$K_{pos} \sim \lim_{s \rightarrow 0} H C(s) G(s)$$



Errore di velocità

$r(t) = \text{rampa}$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} \frac{1/H}{12 H C(s) G(s)} \sim C_1 \left( \frac{d}{ds} W_e(s) \right) \sim \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{1/H}{12 \frac{1}{s} H C'(s) G'(s)} \sim \frac{1}{H K_{vel}}$$

$$K_{vel} \sim \lim_{s \rightarrow 0} s H C(s) G(s)$$



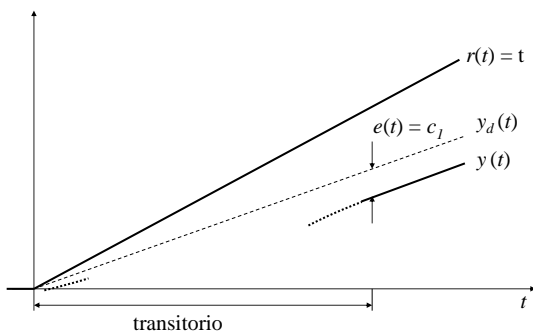
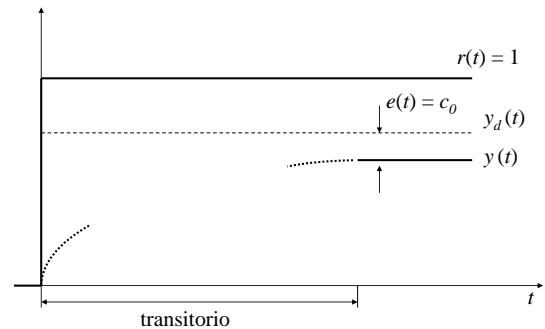
In generale

$$r(t) \sim \frac{t^k}{k!}$$

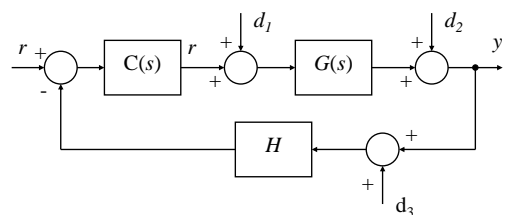
$$\lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{1}{s^k} \right) \left( \frac{1/H}{12 F(s)} \right) \sim \frac{1/H}{\lim_{s \rightarrow 0} s^k F(s)}$$

**Nota bene:**

I termini **“Posizione”** e **“Velocità”** a proposito degli errori relativi non hanno nulla a che vedere con le grandezze fisiche dei segnali d'ingresso e d'uscita del sistema, ma fanno riferimento alla forma del segnale d'ingresso.

**Errori dovuti a disturbi additivi**

Si consideri il seguente sistema di controllo



in cui:

$$\left. \begin{aligned} \frac{y/s0}{r/s0} &| W(s) | \frac{C/s0G/s0}{12 H C/s0G/s0} \\ \frac{y/s0}{d_1/s0} &| W_1/s0 | \frac{G/s0}{12 H C/s0G/s0} \\ \frac{y/s0}{d_2/s0} &| W_2/s0 | \frac{1}{12 H C/s0G/s0} \\ \frac{y/s0}{d_3/s0} &| W_3/s0 | \frac{4 H C/s0G/s0}{12 H C/s0G/s0} \end{aligned} \right\}$$



Analizzando tali funzioni di trasferimento si possono evidenziare i comportamenti del sistema (risposta di regime permanente) per ingressi e disturbi sinusoidali.

Ricordando che qualunque segnale può essere espresso come somma di infinite sinusoidi di pulsazione diversa (integrale di Fourier) i risultati possono essere estesi a segnali generici dei quali si conosca la banda.



Se  $|H C/s0G/s0| \gg 1$

$$W/s0 \approx \frac{C/s0G/s0}{H C/s0G/s0} \approx \frac{1}{H}$$

$$W_1/s0 \approx \frac{G/s0}{H C/s0G/s0} \approx \frac{1}{H C/s0}$$

$$W_2/s0 \approx \frac{1}{H C/s0G/s0} \approx 0$$

$$W_3/s0 \approx \frac{4 H C/s0G/s0}{H C/s0G/s0} \approx 41$$



quasi ideale

$d_1$  viene attenuato

$d_2$  viene molto attenuato

$d_3$  viene trasferito tale e quale



Se  $|H C/s0G/s0| \ll 1$

$$W/s0 \approx C/s0G/s0$$

$$W_1/s0 \approx G/s0$$

$$W_2/s0 \approx 1$$

$$W_3/s0 \approx 4 H C/s0G/s0$$



in generale gli ingressi vengono attenuati

$\langle \rangle I ?$

$d_2$  viene trasferito tale e quale

$d_3$  viene molto attenuato



Si può anche considerare la risposta di regime permanente relativa ad un dato disturbo quando questo ha un andamento definito.

Il caso di disturbi con andamento polinomiale è di particolare interesse e in pratica si considera principalmente il caso di disturbi costanti.

Definizione:

Un sistema di controllo si dice **astatico** rispetto ad un dato disturbo se l'uscita a regime, dovuta al disturbo è nulla.

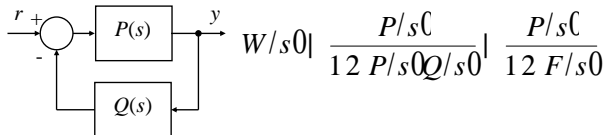


Affinché l'uscita di regime permanente sia nulla quando l'ingresso (disturbo) è un polinomio di grado  $k$  occorre che nella funzione di trasferimento (disturbo-uscita) vi sia uno zero nell'origine con molteplicità maggiore di  $k$  ( $k+1$  o più).

E' conveniente tradurre tale condizione in specifiche a cui deve soddisfare la funzione di trasferimento ad anello aperto.

A tal fine si noti che:

Data la generica funzione di un sistema di controllo ad anello chiuso



Il numero di zeri di  $W(s)$  nell'origine è pari al numero di poli di  $F(s)$  nell'origine meno il numero di poli di  $P(s)$  nell'origine.

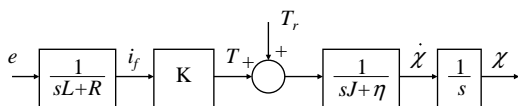
Quindi il numero di zeri di  $W(s)$  nell'origine è pari al numero di poli di  $Q(s)$  (blocco in retroazione) nell'origine.

$W_1(s)$  ha tanti zeri in zero quanti sono i poli di  $C(s)$  in zero

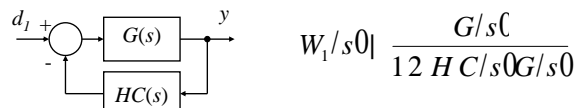
$W_2(s)$  ha tanti zeri in zero quanti sono i poli di  $C(s)G(s)$  in zero

$W_3(s)$  non può avere zeri in zero

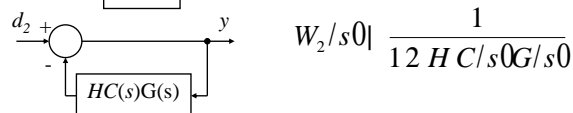
Esempio



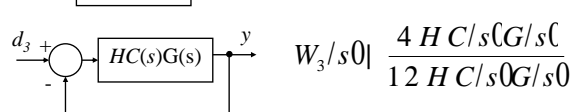
Nel dettaglio, per i disturbi  $d_1, d_2, d_3$  considerati in precedenza si ha



$$W_1(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + HC(s)G(s) + F(s)}$$



$$W_2(s) = \frac{1}{1 + HC(s)G(s) + F(s)}$$



$$W_3(s) = \frac{4 HC(s)G(s)C(s)}{1 + HC(s)G(s) + F(s)}$$

### Generalizzando

I sistemi di controllo in retroazione sono astatici ai disturbi additivi polinomiali che entrano nella catena diretta (tra ingresso ed uscita) se a monte di essi (tra ingresso e disturbo) c'è un numero di poli nell'origine maggiore del grado del polinomio di disturbo.

### Disturbi Parametrici

Per valutare l'influenza dei disturbi parametrici occorre definire come misurare l'influenza delle variazioni parametriche.

L'approccio classico fa riferimento alla funzione di sensitività.

Data una funzione  $W(p)$  dove  $p$  è il parametro soggetto a variazioni, la funzione di sensitività di  $W(p)$  rispetto a  $p$  viene indicata come  $S^w$  ed è definita come il rapporto tra la variazione relativa di  $W(p)$  e quella di  $p$  che l'ha causata.



Si ha

$$S_p^W \approx \left| \frac{\frac{\partial W/p0}{\partial p}}{\frac{W/p0}{p}} \right| \approx \left| \frac{\partial W/p0}{\partial p} \right| \frac{p}{W/p0}$$

passando al limite

$$S_p^W \approx \frac{\epsilon W/p0}{\epsilon p} \frac{p}{W/p0}$$



Se

$$|S_p^W| \ll 1$$

allora  $W(p)$  è poco sensibile alle variazioni di  $p$ .

Se

$$|S_p^W| \gg 1 \quad \text{oppure} \quad |S_p^W| \approx 1$$

allora  $W(p)$  è (molto) sensibile alle variazioni di  $p$ .



Ovviamente  $W(p)$  può dipendere anche da altre variabili oltre a  $p$  (ad esempio da  $s$ ).

In tal caso la sensitività è funzione anche di tali altre variabili.

Va sottolineato che  $S_p^W$  dipende dal valore nominale dei parametri attorno a cui viene calcolata.



Esempio

$$G/s0 \approx \frac{a_m s^m \dots a_{n41} s^{n41} \dots a_0}{s^n \dots b_{n41} s^{n41} \dots b_0}$$

$$S_{a_i}^G \approx \frac{\epsilon G(s)}{\epsilon a_i} \left| \frac{\partial G(s)}{\partial a_i} \right| \approx \frac{s^i}{s^n \dots b_{n41} s^{n41} \dots b_0}$$

$$\approx \frac{s^n \dots b_{n41} s^{n41} \dots b_0}{a_m s^m \dots a_0} \frac{a_i s^i}{a_m s^m \dots a_0}$$

analogamente

$$S_{b_i}^G \approx \frac{\epsilon G(s)}{\epsilon b_i} \left| \frac{\partial G(s)}{\partial b_i} \right| \approx \frac{4 b_i s^i}{s^n \dots b_{n41} s^{n41} \dots b_0}$$



Consideriamo ora lo schema di controllo in retroazione.

Siano  $c$ ,  $g$  e  $h$  tre parametri rispettivamente di  $C(s)$ ,  $G(s)$  e  $H$ .

Tali funzioni avranno una loro funzione di sensitività rispetto alla variazione dei parametri.



$$S_c^{C/s0} \approx \frac{\epsilon C/s0}{\epsilon c} \frac{c}{C/s0}$$

$$S_g^{G/s0} \approx \frac{\epsilon G/s0}{\epsilon g} \frac{g}{G/s0}$$

$$S_h^H \approx \frac{\epsilon H}{\epsilon h} \frac{h}{H}$$



Per la funzione di trasferimento ad anello chiuso

$$W/s0 \left| \frac{C/s0G/s0}{12 H C/s00G/s0} \right|$$

si ha:

$$S_c^{W/s0} \left| \frac{\epsilon W/s0}{\epsilon c} \left( \frac{c}{W/s0} \right) \right|$$

$$\left| \frac{\epsilon W/s0}{\epsilon C/s0} \left( \frac{\epsilon C/s0}{\epsilon c} \right) \left( \frac{c}{C/s0} \right) \left( \frac{C/s0}{W/s0} \right) \right|$$



$$S_c^{W/s0} \left| \frac{\epsilon W/s0}{\epsilon C/s0} \left( \frac{C/s0}{W/s0} \right) \left( \frac{\epsilon C/s0}{\epsilon c} \right) \left( \frac{c}{C/s0} \right) \right|$$

$$\left| S_{C/s0}^{W/s0} \left( S_c^{C/s0} \right) \right|$$

parimenti si può ottenere:

$$S_g^{W/s0} \left| S_{G/s0}^{W/s0} \left( S_g^{G/s0} \right) \right|$$

$$S_h^{W/s0} \left| S_H^{W/s0} \left( S_h^H \right) \right|$$



Con conti elementari si trova:

$$S_{C/s0}^{W/s0} \left| \frac{\epsilon W/s0}{\epsilon C/s0} \left( \frac{C/s0}{W/s0} \right) \left( \frac{1}{12 H C/s00G/s0} \right) \right|$$

$$S_{G/s0}^{W/s0} \left| \frac{\epsilon W/s0}{\epsilon G/s0} \left( \frac{G/s0}{W/s0} \right) \left( \frac{1}{12 H C/s00G/s0} \right) \right|$$

$$S_H^{W/s0} \left| \frac{\epsilon W/s0}{\epsilon H} \left( \frac{H}{W/s0} \right) \left( \frac{4 H C/s00G/s0}{12 H C/s00G/s0} \right) \right|$$



Nota bene:

Le espressioni delle funzioni di sensitività sono formalmente identiche a quelle delle funzioni di trasferimento  $W_2(s)$  e  $W_3(s)$  relative ai disturbi  $d_2$  e  $d_3$ .



## Risposta Transitoria

Il comportamento dei sistemi dinamici durante il transitorio dipende sia dalle condizioni iniziali che dall'ingresso applicato.

La risposta transitoria  $y_i(t)$  è definita come

$$y_i(t) = y_{i0} + \tilde{y}(t)$$

Per analizzare e caratterizzare il comportamento in transitorio dei sistemi controllati in retroazione si usa normalmente la risposta al gradino con condizioni iniziali nulle.



La risposta transitoria al gradino unitario con condizioni iniziali nulle può essere ricavata ricordando che:

$$y(t) = y(s) \left| W/s0 \left( \frac{1}{s} \right) \right| W/s0 \frac{1}{s}$$

$$\tilde{y}(t) = \lim_{t \downarrow 0} y(t) = \lim_{s \downarrow 0} s W/s0 \frac{1}{s} \left| W/s0 \left( \frac{1}{s} \right) \right| C_0$$



Pertanto

$$y_i/s0 | W/s0 \frac{1}{s} 4 C_0 \frac{1}{s}$$

Sviluppando  $W(s)/s$  in fratti semplici e supponendo, per semplicità, che i poli di  $W(s)$  siano tutti distinti si ottiene

$$y_i/s0 | \frac{R_0}{s} 2 \frac{R_i}{s 2 p_i} 4 C_0 \frac{1}{s}$$



Il residuo  $R_0$  vale

$$R_0 | \left( s \frac{W(s)}{s} \right)_{s=0} | \Psi W/s \beta_{s=0} | C_0$$

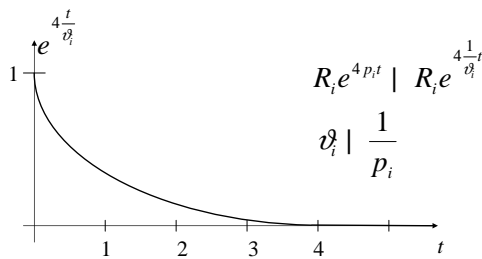
e quindi

$$y_i/s0 | \frac{R_i}{s 2 p_i}$$

$y(t)$  è quindi una somma di termini esponenziali e/o cissoidali a seconda che si abbiano poli reali o complessi coniugati



### Termini Esponenziali



Transitorio estinto dopo 3-4 costanti di tempo.

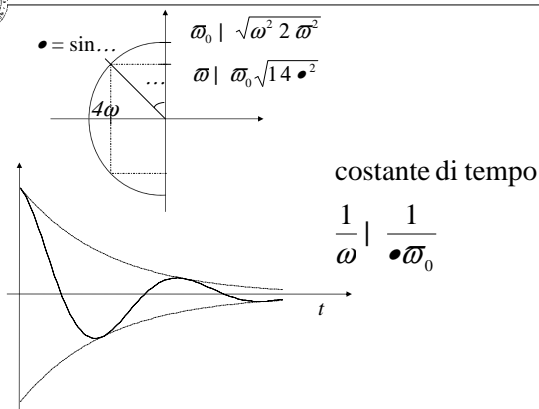


### Termini cisoidali

Per coppie di poli complessi coniugati in  $-\omega \pm j\varpi$  a cui corrispondono residui complessi coniugati  $R$  e  $R^*$

$$2 | R | e^{4 \omega t} \sin \left( \frac{\varpi}{\omega} 2 \frac{\phi}{2} 2 \varphi R \right) |$$

$$| 2 | R | e^{4 \omega_0 t} \sin \left( \frac{\varpi}{\omega_0} \sqrt{14 \bullet^2} t 2 \frac{\phi}{2} 2 \varphi R \right) |$$

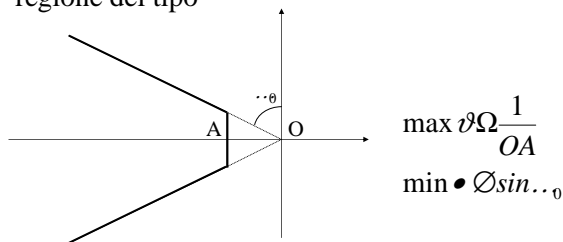


A parità di smorzamento  $\bullet$  il decadimento è tanto più lento quanto più  $\omega_0$  è piccolo (poli vicino all'origine).

A parità di  $\omega_0$  le oscillazioni sono tanto più pronunciate quanto più  $\bullet$  è piccolo.



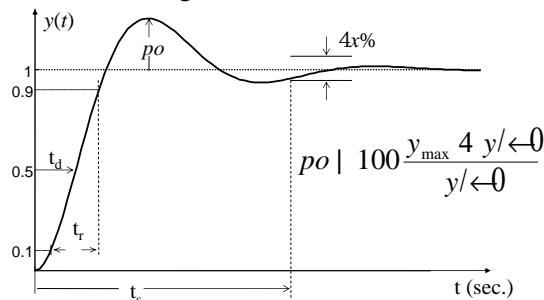
Per avere un transitorio soddisfacente i poli ad anello chiuso devono appartenere a una regione del tipo



In generale  $\bullet \varnothing 0.6 - 0.7$



Un altro modo di caratterizzare la risposta al gradino è quello di ricorrere ai parametri descritti nella figura



$po$  percentuale di overshoot misura di stabilità relativa

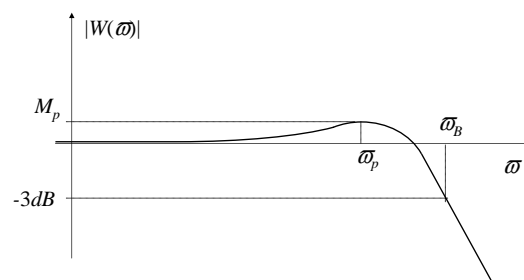
$t_s$  tempo di assestamento misura di stabilità relativa e di velocità di risposta

$t_r$  tempo di salita misura di velocità di risposta

$t_d$  tempo di ritardo misura di velocità di risposta



Il sistema viene anche caratterizzato con i parametri descritti nella figura



$\omega_B$  banda passante misura la velocità di risposta

$\omega_p$  pulsazione di picco misura la velocità di risposta

$M_p$  picco massimo misura la stabilità relativa



Tra i parametri introdotti valgono le seguenti relazioni approssimate

$$12 \frac{po}{100} \approx 0,85 M_p \quad \text{se} \quad 1,3 \{ M_p \{ 1,5$$

$$\omega_B \approx 2,5 \omega_p$$

$$\omega_c \approx 0,4 \div 0,8 \omega_B$$

$\omega_c$  | pulsazione di taglio ad anello aperto



Per i sistemi del second'ordine esistono relazioni più precise tra il valore dei poli della funzione di trasferimento e i parametri sopra introdotti per valutare la risposta al gradino.

Siccome molti sistemi possono essere approssimati con sistemi del second'ordine è conveniente analizzare il caso di tali sistemi.



Data la funzione

$$W(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

i poli sono in

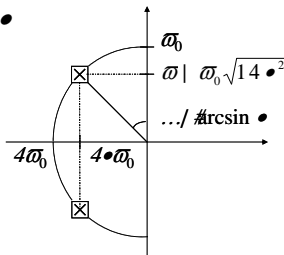
$$s = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

antitrasformando la  $y(s) = W(s) \frac{1}{s}$  si ottiene la risposta al gradino



$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} t) \dots$$

$$\dots \arctg \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$



Periodo di oscillazione.

$$T = \frac{2\phi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Il massimo della funzione  $y(t)$  si trova ponendo che  $\frac{dy}{dt} = 0$  è soddisfatta per

$$t = \frac{n\phi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



Il picco si ha in :

$$t_p = \frac{\phi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{T}{2}$$

e vale:

$$y_{\max} = 1 + \exp\left[-4\frac{\zeta\phi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right]$$



Pertanto la percentuale di overshoot è

$$po = 100 \exp\left[-4\frac{\zeta\phi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right]$$

Il tempo di assestamento  $t_s$  è approssimato come il tempo in cui i massimi scendono sotto il 5% del valore finale

$$\exp\left[-4\frac{\zeta\phi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right] = 0,05$$



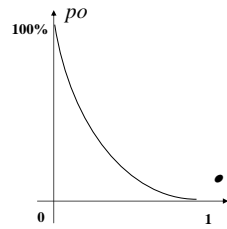
Quindi  $\frac{\bullet n \phi}{\sqrt{14 \bullet^2}} \} 3$

Ciò il tempo a cui  $\bullet \omega_0 n t_p > 3$ , e allora

$t_s \mid n t_p \} \frac{3}{\bullet \omega_0}$

che viene semplificata

$t_s \mid \frac{3}{\bullet \omega_0}$

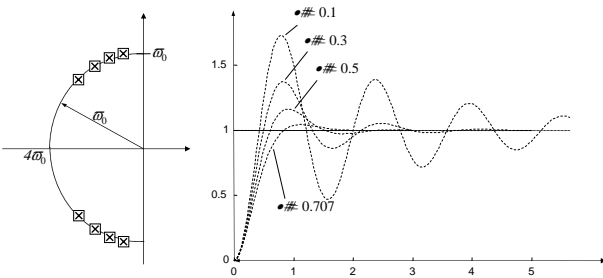


E' interessante notare che  $t_p$  e  $t_s$  sono inversamente proporzionali a  $\omega_0$  così che  $\omega_0 T$ ,  $\omega_0 t_p$  e  $\omega_0 t_s$  sono indipendenti da  $\omega_0$ .

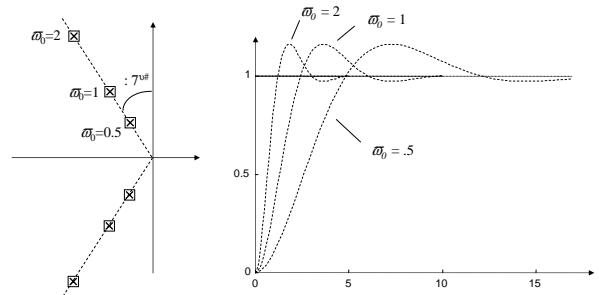
Se si traccia  $y(t)$  in funzione della grandezza adimensionale  $\omega_0 t$  la forma della risposta dipende solo da  $\bullet$  mentre  $\omega_0$  ha il ruolo di fattore di scala nella scala tempi.



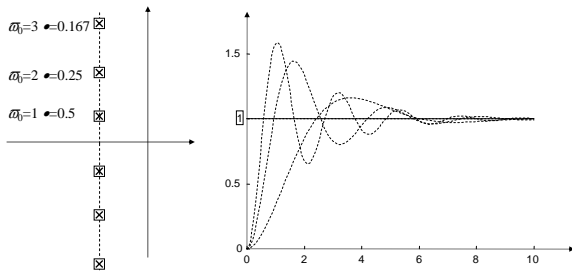
$\bullet$  varia  
 $\omega_0$  fisso



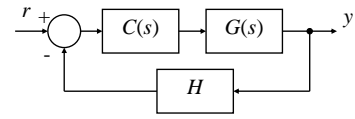
$\bullet$  fisso ( $\bullet=0.5$ )  
 $\omega_0$  varia



$\bullet$  e  $\omega_0$  variano ma il prodotto  $\bullet \omega_0$  resta fisso ( $\bullet \omega_0 = 0.5$ )



Dato il sistema



$$W/s0 \mid \frac{C/s0G/s0}{12 H C/s0G/s0}$$

è utile mettere in relazione modulo e fase della funzione di trasferimento ad anello chiuso  $W(s)$  con modulo e fase della funzione di trasferimento ad anello aperto  $F(s)=HC(s)G(s)$  per  $s=j\omega$ .



Consideriamo dapprima il caso  $H=1$  per cui

$$W/s0 \mid \frac{F/s\zeta}{12 F/s0}$$

Una relazione tra  $W(j\omega)$  e  $F(j\omega)$  può essere evidenziata con l'uso del diagramma di Nyquist o del diagramma di Nichols, quando su tali diagrammi vengono riportati i luoghi per cui  $|W(j\omega)|$  e  $\angle W(j\omega)$  sono costanti.



Per quanto riguarda i diagrammi di Nyquist questi luoghi sono delle circonferenze dette **cerchi M** (per modulo costante) e **cerchi N** (per fase costante).



### Cerchi M a modulo costante

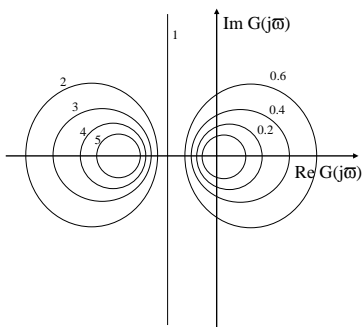
Centro in:

$$x \mid \frac{4 M^2}{M^2 + 4}$$

$$y \mid 0$$

e raggio:

$$r \mid \left| \frac{M}{M^2 + 4} \right|$$



### Cerchi N a fase costante

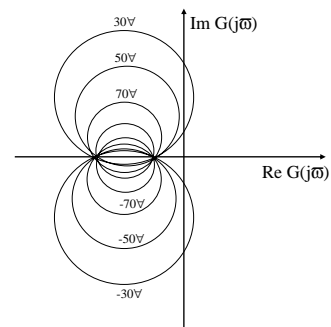
Centro in:

$$x \mid 4 \frac{1}{2}$$

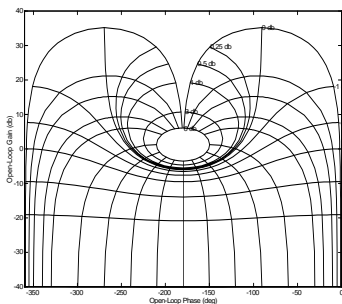
$$y \mid \frac{1}{2N}$$

e raggio:

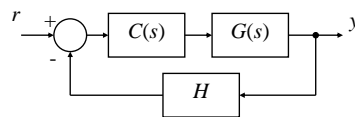
$$r \mid \sqrt{1/4 + 1/2N^2}$$



Anche per i diagrammi di Nichols si hanno i luoghi a modulo e fase costante che però non sono più delle circonferenze.



Per il caso in cui  $H$  non è unitario basta considerare che:



è equivalente a

