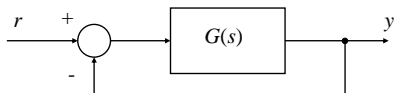




Retroazione e Stabilità



$$G/s0| \dots\dots \heartsuit W/s0| \frac{G/s0}{12 G/s0}$$



$$G/s0| \frac{K}{s^2 a} \heartsuit W/s0| \frac{K}{12 \frac{s^2 a}{K}}$$

$$W/s0| \frac{K}{s^2/a^2 K0}$$

$$G/s0| \frac{K}{s^4 a} \heartsuit W/s0| \frac{K}{s^2/K^4 a0}$$



$$G/s0| \frac{K}{s^2 2 a^2} \heartsuit W/s0| \frac{K}{12 \frac{s^2 2 a^2}{K}}$$

$$W/s0| \frac{K}{s^2 2/a^2 2 K0}$$



$$G/s0| \frac{K/s^2 10}{s^2 2 1} \heartsuit W/s0| \frac{K/s^2 10}{12 \frac{s^2 2 1}{K/s^2 10}}$$

$$W/s0| \frac{K/s^2 10}{s^2 2 Ks^2/K^2 10}$$

$$s_{1,2} | \frac{4 K \partial \sqrt{K^2 4 4/K^2 10}}{2}$$



$$G/s0| K \frac{10/s^2 50}{s^2 50} \heartsuit W/s0$$

$$W/s0| \frac{10/s^2 50}{12 K \frac{10/s^2 50}{s^2 50}} | \frac{10K/s^2 50}{s^2 50 2 10K/s^2 50} |$$

$$| \frac{10K/s^2 50}{10K^2 10s^2/50 2 50K0}$$

$$\text{polo: } 4 \frac{50/12 K0}{10K^2 1}$$



$$G/s0| K \frac{10/s^4 50}{s^2 50}$$

$$W/s0| \frac{10K/s^4 50}{10K^2 10s^2/50 4 50K0}$$

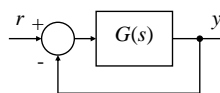
$$\text{polo: } s | 4 \frac{50/14 K0}{10K^2 1}$$



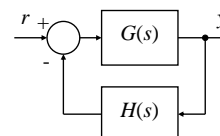
$$G(s) = K \frac{10/s + 2.50}{s + 4.50}$$

$$W(s) = \frac{10K/s + 2.50}{10K + 2.10s + 2.50/K + 4.10}$$

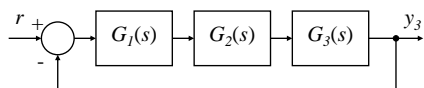
$$\text{polo: } s = -4 \frac{50/K + 4.10}{10K + 2.1}$$



$$W(s) = \frac{G(s)C}{1 + G(s)C}$$

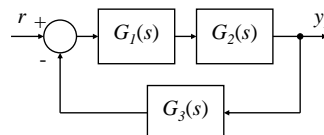


$$W(s) = \frac{G(s)C}{1 + G(s)C H(s)}$$



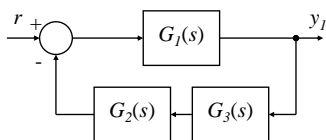
$$W_3(s) = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3} = \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$

$$F(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s)$$



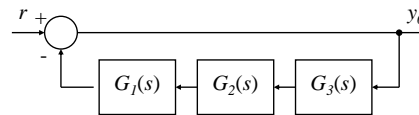
$$W_2(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 G_3} = \frac{G_1 G_2}{1 + F(s)}$$

$$F(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s)$$



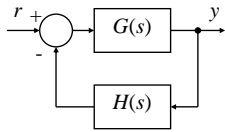
$$W_1(s) = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2 G_3} = \frac{G_1}{1 + F(s)}$$

$$F(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s)$$



$$W_0(s) = \frac{1}{1 + G_1 G_2 G_3} = \frac{1}{1 + F(s)}$$

$$F(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s)$$



$$W/s0 \left| \frac{G/s0}{12 G/s0 H/s0} \right| \frac{N_G}{D_G} \frac{N_G}{D_G D_H}$$

$$W/s0 \left| \frac{D_G}{D_G D_H 2 N_G N_H} \right| \frac{N_G D_H}{D_G D_H 2 N_G N_H}$$



Criterio di Routh-Hurwitz

Dato il polinomio

$$P/s0 \left| s^n 2 d_n s^{n-1} 2 \dots 2 d_2 s 2 d_1 \right.$$

si vuole sapere se ha tutte le radici a parte reale negativa.



Test di Hurwitz:

- Tutti i coefficienti devono essere presenti
- Tutti i coefficienti devono essere positivi

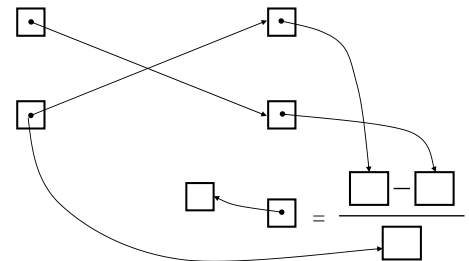
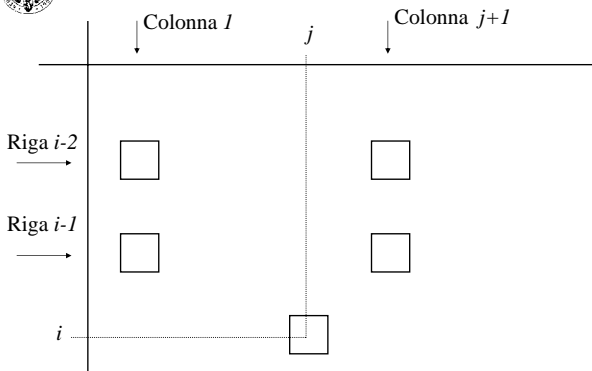
Il Test di Hurwitz è condizione necessaria, ma non sufficiente:

$$/s 2 10s^2 4 0,5s 2 4 \left| s^3 2 0,5s^2 2 3,5s 2 4 \right.$$



Tabella di Routh:

0	t_{01}	1	t_{02}	d_{n41}	t_{03}	d_{n43}	&
1	t_{11}	d_n	t_{12}	d_{n42}	t_{13}	d_{n44}	&
2	t_{21}		t_{22}		t_{23}		&
(&		&		&		&
n 4 1	$t_{n41,1}$		0		0		&
n	$t_{n,1}$		0		0		'
t_{ij}	$\frac{t_{i41,1} t_{i42,j21} - t_{i42,1} t_{i41,j21}}{t_{i41,1}}$						$i = 2,3,\dots,n$ $j = 1,2,\dots$





Esempio $s^3 + 2d_3s^2 + 2d_2s + d_1$

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & d_2 & 0 \\ 1 & d_3 & d_1 & 0 \\ 2 & t_{21} & 0 & \\ 3 & t_{31} & 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} t_{21} = \frac{d_3 d_2 - 4d_1}{d_3} \\ t_{31} = \frac{t_{21} d_1}{t_{21}} = d_1 \end{array}$$



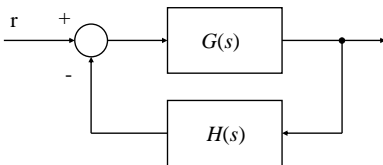
Dalla prima colonna della tabella si hanno le condizioni:

$$\begin{aligned} d_3 &> 0 \\ d_3 d_2 - d_1 &> 0 \quad \heartsuit \quad d_3 d_2 > d_1 \\ d_1 &> 0 \end{aligned}$$

La condizione $d_2 > 0$ non appare esplicitamente, ma è implicata dalle altre.



Criterio di Nyquist



$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1 + F(s)}$$



Il sistema è stabile ad anello chiuso se $W(s)$ ha tutti i poli nel semipiano di sinistra,

cioè se $1 + F(s)$ ha tutti gli zeri nel semipiano di sinistra.



Immaginiamo che la funzione $1 + F(s)$ sia data in forma fattorizzata

$$1 + F(s) = \frac{K \prod_{i=1}^n (s - z_i)}{\prod_{j=1}^m (s - p_j)}$$

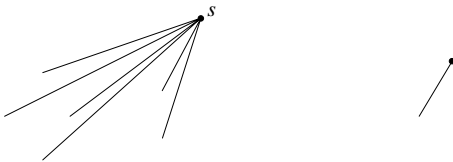
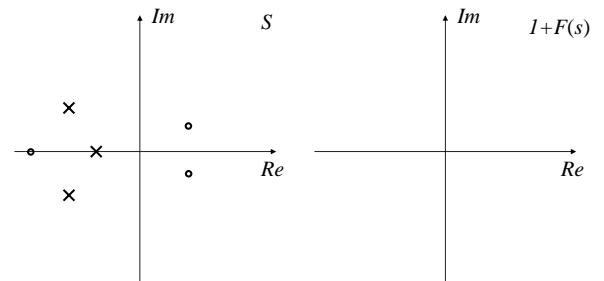
che può essere scritta come



$$1 + F(s) = \frac{K \prod_{i=1}^n (s - z_i) e^{j\alpha_i s}}{\prod_{j=1}^m (s - p_j) e^{j\beta_j s}}$$



Se si riportano sul piano S poli e zeri della funzione $1+F(s)$ si può calcolare graficamente per ogni punto in S il corrispondente valore di $1+F(s)$.

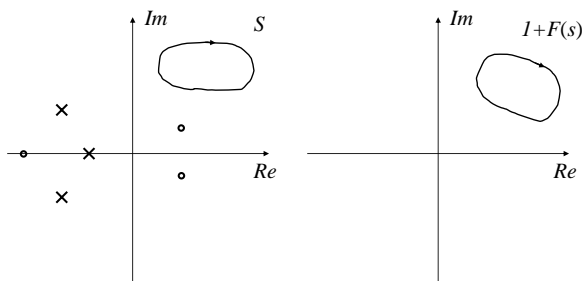


Per ogni linea in S è possibile trovare una linea corrispondente in $1+F(s)$.



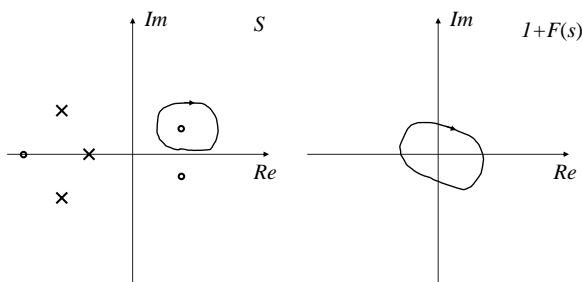
In particolare, a linee chiuse in S corrispondono linee chiuse in $1+F(s)$.

Se la linea chiusa in S non racchiude né poli né zeri la corrispondente linea chiusa in $1+F(s)$ non racchiude l'origine.



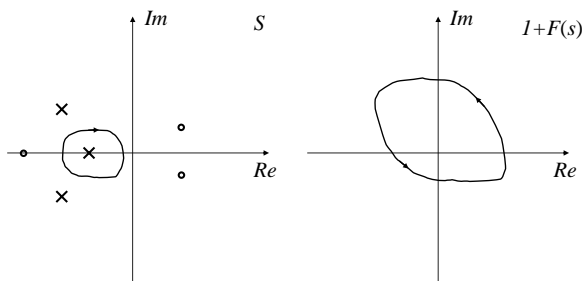
Se la linea chiusa in S racchiude uno zero la corrispondente linea in $I+F(s)$ racchiude l'origine.

Se la linea in S viene percorsa in senso orario anche la corrispondente linea in $I+F(s)$ è percorsa in senso orario.



Se la linea chiusa in S racchiude un polo la corrispondente linea in $I+F(s)$ racchiude l'origine.

Se la linea in S viene percorsa in senso orario la corrispondente linea in $I+F(s)$ è percorsa in senso antiorario.



Se la linea chiusa in S , percorsa in senso orario, racchiude N_z zeri e N_p poli, allora la corrispondente linea chiusa in $I+F(s)$ farà:

$$N_G = N_z - N_p$$

giri attorno all'origine

$$N_G > 0 \heartsuit \text{ giri orari}$$

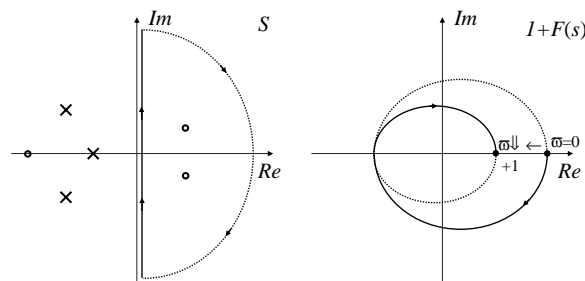
$$N_G < 0 \heartsuit \text{ giri antiorari}$$



Il nostro scopo iniziale era quello di determinare se $I+F(s)$ ha degli zeri nel semipiano di destra perché se così è il sistema dato è instabile ad anello chiuso.

Se scegliamo un contorno in S che racchiude tutto il semipiano di destra e siamo in grado di trovare il contorno corrispondente in $I+F(s)$ allora siamo in grado di conoscere la differenza tra i poli e gli zeri di $I+F(s)$ nel semipiano di destra perché $N_G = N_Z - N_P$.

Il contorno desiderato è il contorno di Nyquist.



Tuttavia per conoscere il numero di zeri di $I+F(s)$ nel semipiano di destra, occorre sapere quanti siano i poli di $I+F(s)$ in tale semipiano.

I poli di $I+F(s)$ sono i poli di $F(s)$, quindi dobbiamo sapere quanti siano i poli nel semipiano di destra (poli instabili) della funzione di trasferimento ad anello aperto; tale informazione è di massima disponibile.



Ultimo problema da risolvere è quello di tracciare il diagramma di Nyquist di $I+F(s)$.

Notiamo che

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{I+F(s)\} &= \operatorname{Re}\{F(s)\} + 1 \\ \operatorname{Im}\{I+F(s)\} &= \operatorname{Im}\{F(s)\} \end{aligned}$$

Quindi il diagramma di Nyquist di $I+F(s)$ può essere ottenuto facilmente da quello di $F(s)$ trasladandolo tutto di 1 nel verso dell'asse reale positivo.



Tuttavia, invece di ottenere il diagramma di Nyquist di $F(s)$, traslarlo per ottenere il diagramma di $I+F(s)$ ed andare quindi a vedere quante volte tale diagramma gira attorno all'origine basta andare a vedere direttamente quante volte il diagramma di Nyquist di $F(s)$ gira attorno al punto $-1, j0$.



Osservazioni

La stabilità del sistema retroazionato viene studiata guardando le proprietà della funzione ad anello aperto.

Per i sistemi che ad **anello aperto sono stabili**, il criterio di Nyquist richiede che il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento ad anello aperto abbia un numero netto di zero giri attorno al punto $(-1,0)$.