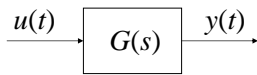




Il diagramma di Bode



Se $u(t) = \sin \omega t$ allora

$$y(t) = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

(2 altri termini (*transitori*))



È utile conoscere l'andamento di $G(j\omega)$ in funzione di ω .

$G(j\omega)$ è una grandezza complessa caratterizzabile con:

- modulo e fase

$$|G(j\omega)| = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)}$$

- parte reale ed immaginaria

$$|G(j\omega)| = \operatorname{Re} G(j\omega) + j \operatorname{Im} G(j\omega)$$



L'andamento di modulo e fase, in funzione di ω , può essere calcolato per punti e riportato su grafico.

Tale procedura è quella usata in programmi tipo MATLAB.



Il Diagramma Approssimato del Modulo

Consideriamo dapprima il caso di una funzione di trasferimento con poli e zeri *reali*.

Ad esempio

$$G(s) = \frac{K/s + \omega_1}{s + \omega_2}$$

La funzione di trasferimento $G(s)$ è stata data in forma fattorizzata poli e zeri.



Primo passo

Mettiamo la $G(s)$ in forma di *costanti di tempo*

$$G(s) = \frac{K\omega_1}{\omega_2} \frac{1 + s/\omega_1}{s + \omega_2}$$

e quindi

$$G(j\omega) = \frac{K\omega_1}{\omega_2} \frac{1 + j\omega/\omega_1}{j\omega + \omega_2}$$



Il modulo di $G(j\omega)$ risulta

$$|G(j\omega)| = \frac{K\omega_1}{\omega_2} \frac{\sqrt{1 + (\omega/\omega_1)^2}}{\sqrt{\omega^2 + \omega_2^2}}$$

ed è uguale al prodotto di più termini.



L'operazione prodotto non è agevole graficamente, per questo conviene passare ai logaritmi

$$\log|G(j\omega)| = \log\left|\frac{K\omega_1}{\omega_2}\right| + 2\log\left|1 + 2\frac{j\omega}{\omega_1}\right| + 4\log|j\omega| + 4\log\left|1 + 2\frac{j\omega}{\omega_2}\right|$$



Il passaggio ai logaritmi ha anche altri vantaggi soprattutto se si prende anche il logaritmo della pulsazione ω .

Per vedere ciò consideriamo il termine

$$\log\left|1 + 2\frac{j\omega}{\omega_1}\right|$$



Comportamento asintotico per $\omega \ll \omega_1$

$$\log\left|1 + 2\frac{j\omega}{\omega_1}\right| \approx \log|1| = 0$$

quindi è una costante in funzione di ω o di $\log\omega$.



Comportamento asintotico per $\omega \gg \omega_1$

$$\log\left|1 + 2\frac{j\omega}{\omega_1}\right| \approx \log\left|\frac{j\omega}{\omega_1}\right| = \log\omega - \log|\omega_1|$$

siccome ci interessa solo il caso $\omega \gg 0$.

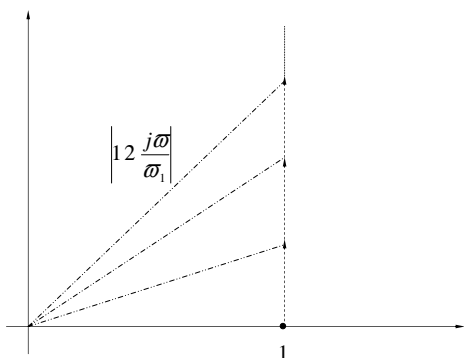
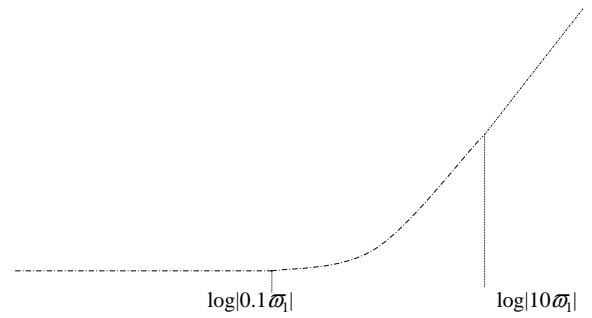
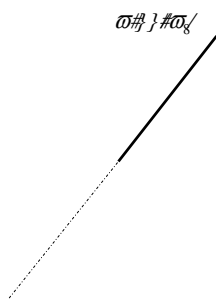
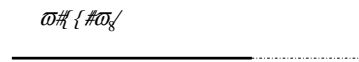
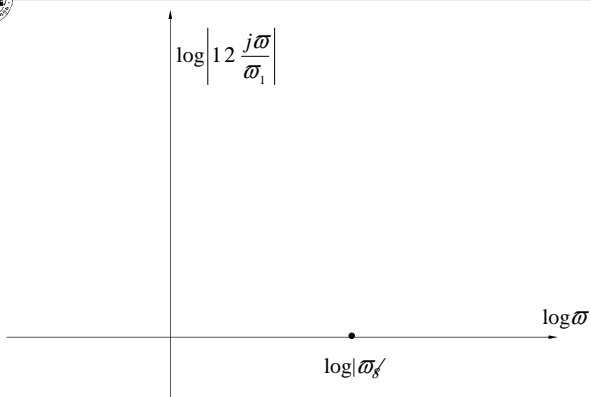


In quest'ultimo caso abbiamo una funzione di $\log\omega$ che è una retta di pendenza unitaria e intercetta delle ascisse pari a $\log|\omega_1|$.

$$\log\left|1 + 2\frac{j\omega}{\omega_1}\right| \approx \log\omega - \log|\omega_1|$$



$$y = x - b$$



Di massima il diagramma approssimato è sufficientemente accurato.

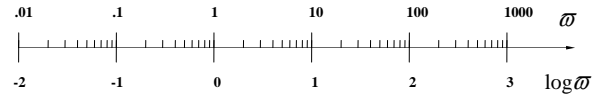
Tuttavia si può ricordare che alla pulsazione di taglio ω_g c'è un fattore $\sqrt{2}$ tra diagramma vero e diagramma approssimato.



Il Problema delle Scale

Sulle ascisse si ha $\log(\omega)$; ovviamente si potrebbe avere una scala lineare su cui riportare il valore di $\log(\omega)$.

E' più conveniente una scala logaritmica su cui riportare direttamente ω .



Analogo problema per le ordinate dove viene riportato il valore di

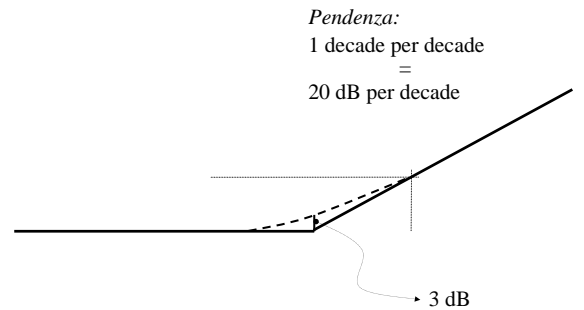
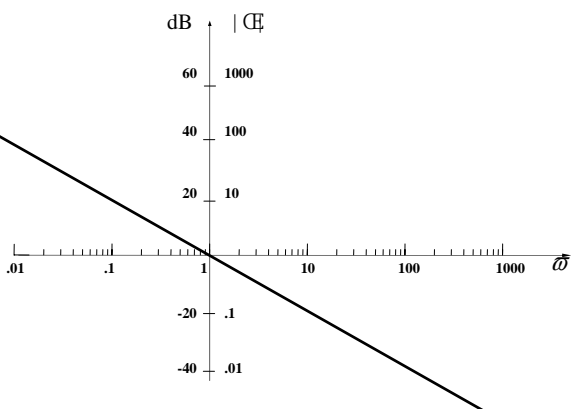
$$\log|G(j\omega)|$$

In questo caso si possono usare anche i decibel (dB).

$$dB | 20 \log | \dots |$$



| $20 \log \dots $ | $\log \dots $ | $ \dots $ |
|---------------------|------------------|-------------|
| 60 | 3 | 1000 |
| 40 | 2 | 100 |
| 20 | 1 | 10 |
| 0 | 0 | 1 |
| -20 | -1 | .1 |
| -40 | -2 | .01 |





Consideriamo adesso gli altri termini di $|G(j\omega)|$

$$4 \log \left| 12 \frac{j\omega}{\omega_2} \right|$$

differisce dal termine già visto solo per il segno.



Per $\omega \ll \omega_2$

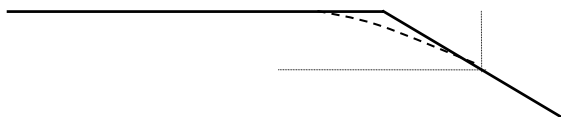
$$4 \log \left| 12 \frac{j\omega}{\omega_2} \right| \approx 4 \log 12 - 4 \log \omega_2$$

Per $\omega \gg \omega_2$

$$4 \log \left| 12 \frac{j\omega}{\omega_2} \right| \approx 4 \log \left| \frac{j\omega}{\omega_2} \right| + 4 \log \omega_2$$



$$4 \log \left| 12 \frac{j\omega}{\omega_2} \right|$$



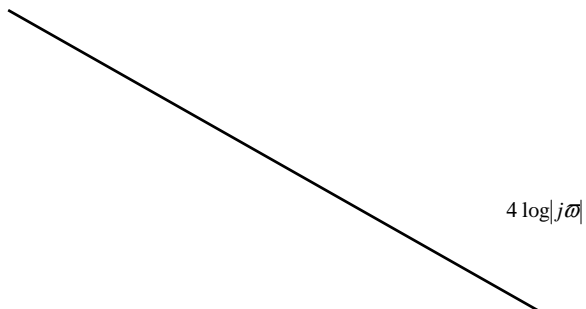
Il termine

$$- \log |j\omega|$$

relativamente al polo nell'origine è ancora più facile da trattare.

Risulta una retta con pendenza -1 decade per decade (-20 dB per decade)

Non si fanno approssimazioni.



$$4 \log |j\omega|$$



Il termine

$$\log \left| \frac{K\omega_1}{\omega_2} \right|$$

è anche molto facile da trattare perchè è una costante.



$$\log \left| \frac{k\omega_1}{\omega_2} \right|$$



Disegnate singolarmente le varie componenti, basta sommarle per ottenere $|G(j\omega)|$.

Attenzione: si devono sommare i logaritmi e quindi si devono sommare le distanze dei vari grafici elementari dall'asse orizzontale a 0 dB ovvero $|G(j\omega)|=1$.



Esempio:

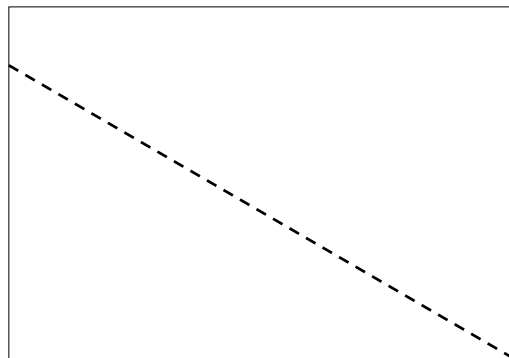
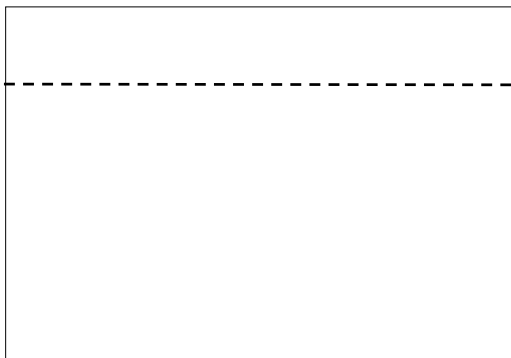
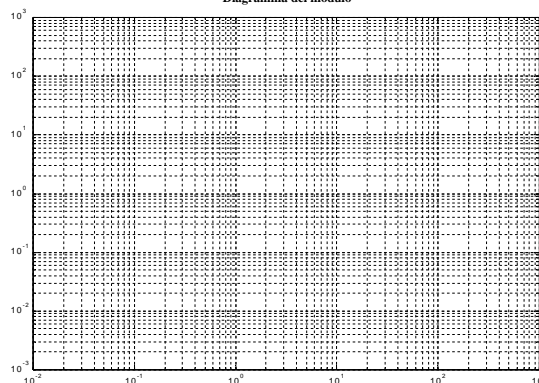
$$G(s) = \frac{500/s \cdot 2 \cdot 200}{s/s \cdot 2 \cdot 20 \cdot s \cdot 2 \cdot 1000}$$

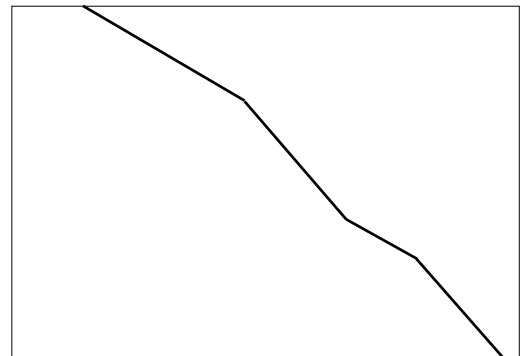
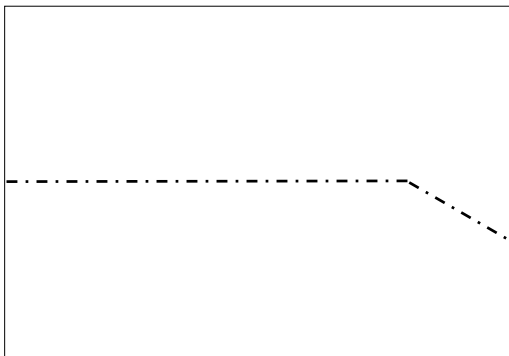
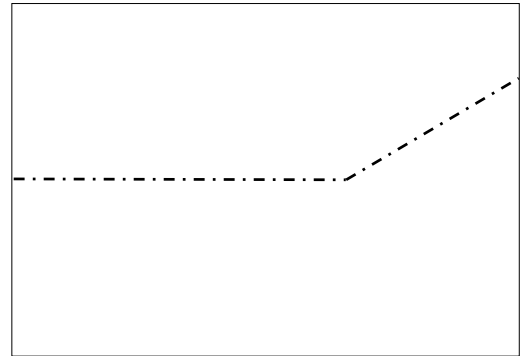
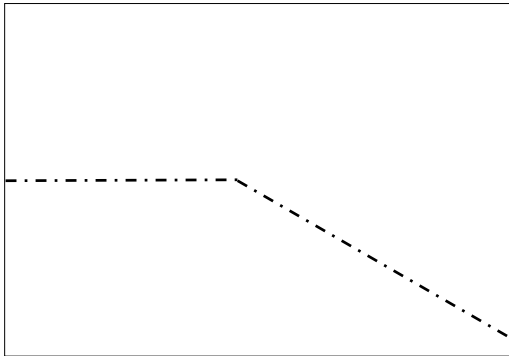
$$G(s) = \frac{500 \left(\frac{R}{TM} \right) \left(2 \frac{s}{20} \right)}{2 \left(\frac{R}{TM} \right) \left(\frac{R}{TM} \right) \left(2 \frac{s}{2} \right) \left(\frac{R}{TM} \right) \left(2 \frac{s}{100} \right)}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{50 \left(\frac{R}{TM} \right) \left(2 \frac{j\omega}{20} \right)}{j\omega \left(\frac{R}{TM} \right) \left(2 \frac{j\omega}{2} \right) \left(\frac{R}{TM} \right) \left(2 \frac{j\omega}{100} \right)}$$



Diagramma del modulo





Valori del diagramma approssimato di $G(j\omega)$ al variare di ω .

$$\begin{aligned} \omega < 2 & |G(j\omega)| \approx \frac{50}{\omega} \\ 2 < \omega < 20 & |G(j\omega)| \approx \frac{50}{\omega} \left| \frac{100}{\omega^2} \right. \\ & \left. \frac{\omega}{2} \right. \\ 20 < \omega < 100 & |G(j\omega)| \approx \frac{50}{\omega} \left| \frac{100}{\omega^2} \right. \left| \frac{5}{\omega} \right. \\ & \left. \frac{\omega}{2} \right. \\ 100 < \omega & |G(j\omega)| \approx \frac{50}{\omega} \left| \frac{\omega}{20} \right. \left| \frac{5}{\omega} \right. \left| \frac{1}{\omega} \right. \\ & \left. \frac{\omega}{2} \right. \left| \frac{100}{100} \right. \left| \frac{500}{\omega^2} \right. \end{aligned}$$

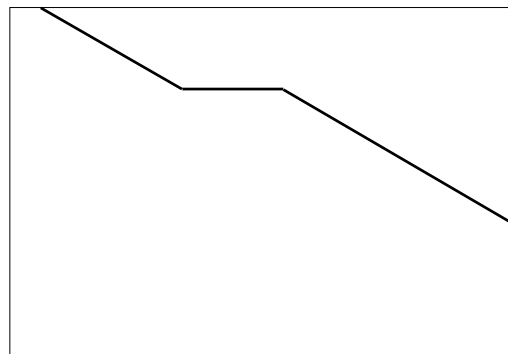
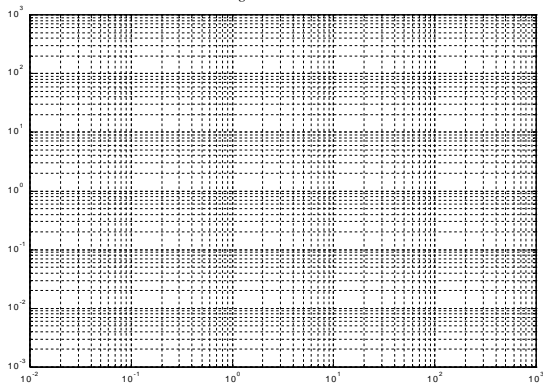


Provare con

$$\begin{aligned} |G/s0| & \frac{200/s}{s} \left| \frac{2}{2} \right. \left| \frac{0,5C}{50} \right. \\ |G/s0| & \frac{200}{s} \left| \frac{0,5}{s} \right. \left| \frac{2}{2} \right. \left| \frac{s}{0,5} \right. \\ & \left| \frac{5}{s} \right. \left| \frac{2}{2} \right. \left| \frac{s}{5} \right. \\ |G/j\omega0| & \frac{20}{j\omega} \left| \frac{2}{2} \right. \left| \frac{j\omega}{0,5} \right. \\ & \left| \frac{j\omega}{j\omega} \right. \left| \frac{2}{2} \right. \left| \frac{j\omega}{5} \right. \end{aligned}$$



Diagramma del modulo



Il Caso di Poli (o Zeri) Complessi Coniugati

Sia

$$|G/s0| = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

poniamola in forma di costanti di tempo

$$|G/s0| = \frac{1}{\left(2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 2\right)^2 + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2}$$



Risulta

$$|G/j\omega0| = \frac{1}{\left(4\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

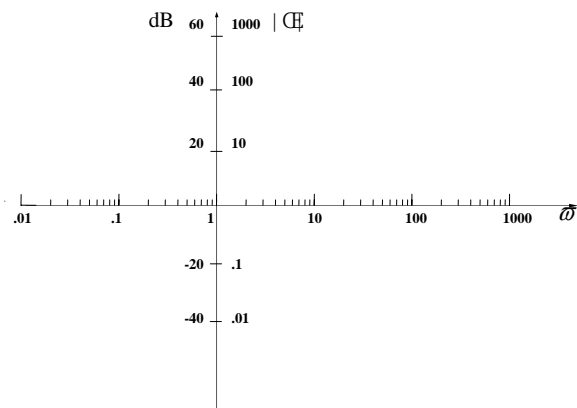
se $\omega \ll \omega_n$ la parte reale è predominante e -1

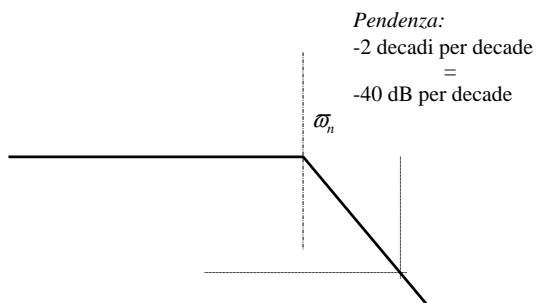
$$\log|G/j\omega0| \approx 4 \log 1 = 0$$



Per $\omega \gg \omega_n$ predomina il termine quadratico della parte reale.

$$\log|G/j\omega0| \approx 4 \log \left| \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right| = 8 \log \omega - 8 \log \omega_n$$

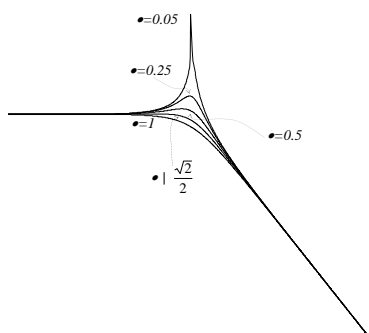




Il diagramma asintotico non dipende dallo smorzamento \bullet .

Tuttavia \bullet influenza il diagramma esatto.

Nota bene: $\bullet \Omega 1$



Per determinare la pulsazione a cui si ha un massimo si trova per quale ω_{\max}

$$\frac{d|G/j\omega|}{d\omega} \Big|_0$$

e si trova

$$\omega_{\max} \Big| \omega_n \sqrt{1 - 2\bullet^2}$$



Da ciò segue che si hanno massimi solo se

$$\bullet \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \heartsuit \omega_{\max} \text{ è reale} \right.$$

in tali condizioni il massimo è

$$|G/j\omega_{\max}| \Big| \frac{1}{2\bullet \sqrt{1 - 4\bullet^2}}$$



Nel caso di zeri complessi coniugati i diagrammi risultano analoghi, ma sono simmetrici rispetto all'asse delle ascisse.

Nota bene

Se poli e/o zeri sono a parte reale positiva o negativa non cambia nulla per quanto riguarda il diagramma di Bode del modulo.



Esempio:

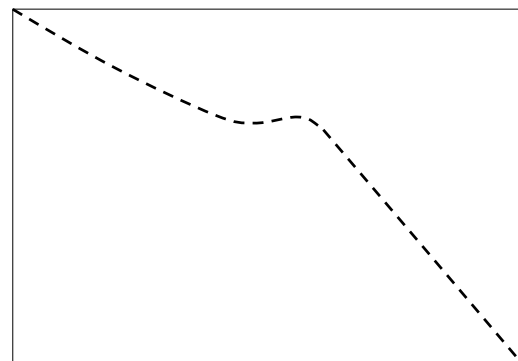
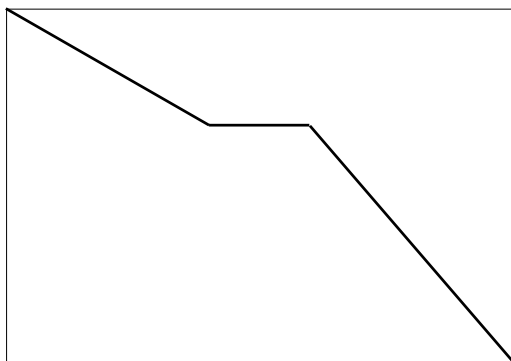
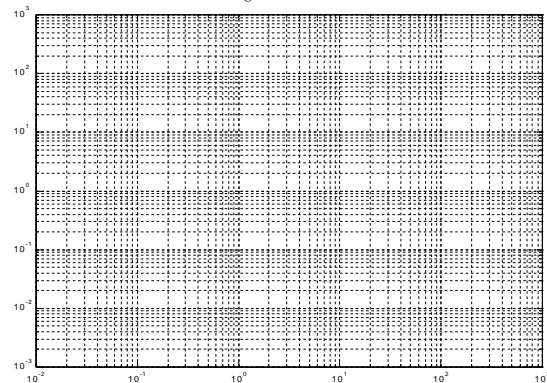
$$|G/s0| = \frac{1000/s \cdot 4 \cdot 10}{s/s^2 \cdot 2 \cdot 10s \cdot 2 \cdot 1000}$$

$$|G/s0| = \frac{4 \cdot 1000 \left(\frac{s}{1} \right)}{100s^2 \cdot 2 \cdot \frac{10}{100} s \cdot 2 \cdot \frac{s^2}{100}}$$

$$\left| \frac{4 \cdot 10 \left(\frac{s}{1} \right)}{s^2 \cdot 2 \cdot 0,1s \cdot 2 \cdot \frac{s^2}{100}} \right| \quad \left[\begin{array}{l} \omega_n | 10 \\ \bullet | 0,5 \end{array} \right]$$



Diagramma del modulo



Calcolo del modulo di $G(j\omega)$ a diverse pulsazioni.

$$\omega \Omega 1 \quad |G/j\omega| \approx \frac{10}{\omega}$$

$$1 \Omega \omega \Omega 10 \quad |G/j\omega| \approx \frac{10\omega}{\omega} = 10$$

$$10 \Omega \omega \quad |G/j\omega| \approx \frac{10 \omega}{\omega^2} = \frac{10}{\omega} = \frac{1000}{\omega^2}$$



Calcolo della pulsazione di taglio ω_c .

Dal grafico risulta $\omega_c > 10$, quindi

$$|G/j\omega_c| \approx \frac{1000}{\omega_c^2} = 1$$

$$\omega_c = \sqrt{1000} \approx 31,6$$

**Nota bene**

La pendenza del diagramma di $|G(j\omega)|$ alle basse frequenze è determinata dal numero di poli (o zeri) nell'origine.

La pendenza del diagramma di $|G(j\omega)|$ alle alte frequenze ($\omega \uparrow \leftrightarrow$) è determinata dalla differenza $N_p - N_z$ tra il numero di poli N_p e il numero di zeri N_z nella funzione di trasferimento.

**Diagramma della Fase di $G(j\omega)$**

Per i sistemi a minima rotazione di fase, *Bode* ha dimostrato una relazione stretta tra diagramma del modulo e diagramma della fase.

**Sistemi a Minima Rotazione di Fase**

I sistemi che non hanno poli e/o zeri nel semipiano di destra e che hanno guadagno positivo sono a *minima rotazione di fase*.

Per tali sistemi il valore del diagramma della fase ad una certa pulsazione ω è funzione della pendenza dell'intero diagramma del modulo.



In pratica la fase alla pulsazione ω dipende quasi solo dalla pendenza del diagramma del modulo una decade prima ed una decade dopo la pulsazione ω considerata.



Anche in questo caso si può fare una approssimazione lineare.

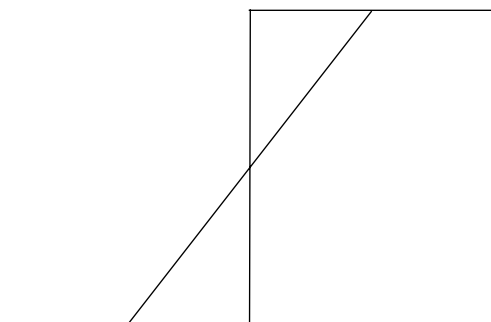
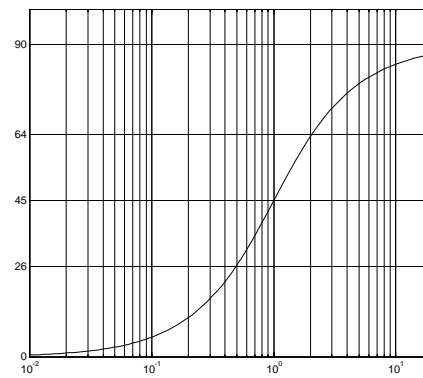
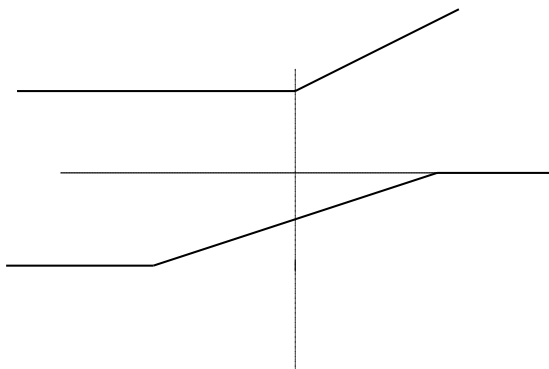
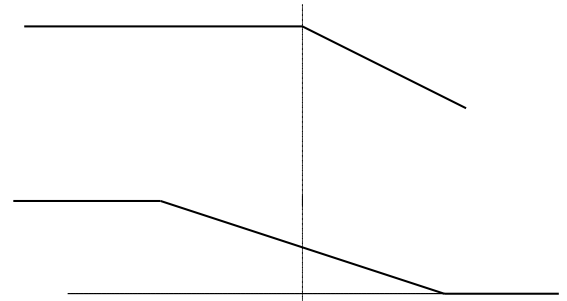
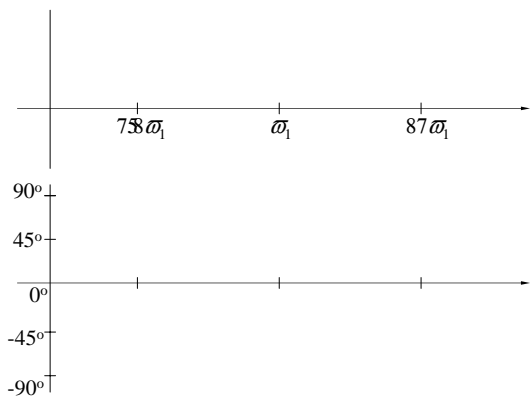
$$\arg G(j\omega) \approx \zeta \frac{\phi}{2}$$

dove ζ è la pendenza media del diagramma del modulo sulle due decadi a cavallo della pulsazione ω considerata.



Questa formula può essere usata per valutare la fase di $G(j\omega)$ in corrispondenza a valori isolati di ω , ma può anche essere usata per ottenere i grafici (approssimati) della fase di poli e zeri presi singolarmente.

Dopo aver tracciato i grafici singoli relativi a tutti i poli e zeri il grafico della fase di $G(j\omega)$ è ottenuto sommando i grafici elementari.



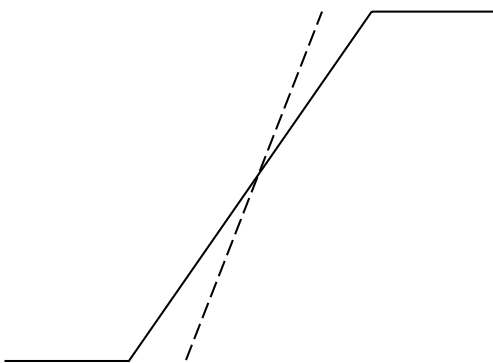
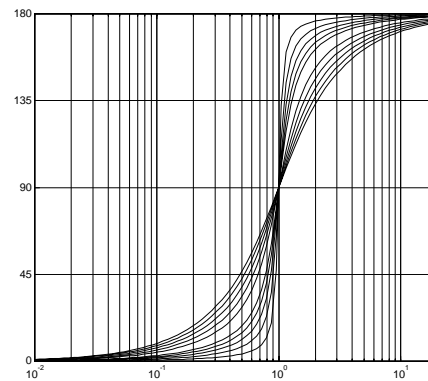
Per poli (o zeri) nell'origine i grafici non vengono riportati in quanto sono delle costanti.

Ogni polo (zero) nell'origine aggiunge uno sfasamento di -90° ($+90^\circ$).



Nel caso di poli e/o zeri complessi coniugati lo smorzamento influisce sul diagramma della fase.

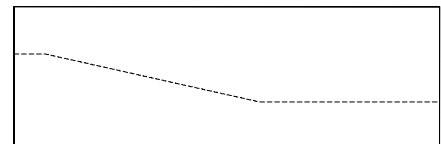
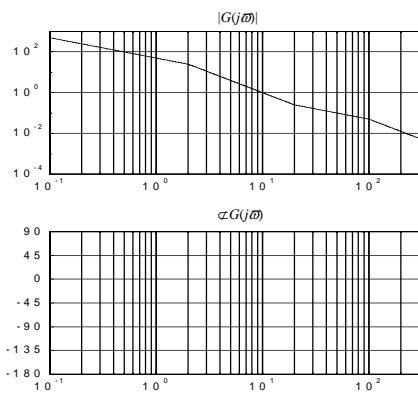
Tuttavia tale dipendenza può essere trascurata se lo smorzamento non è troppo piccolo ($\zeta < 0.4 - 0.5$).

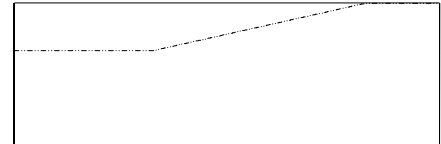
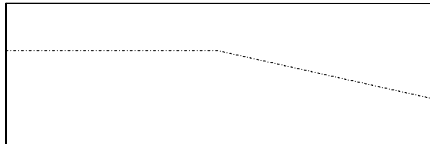


Esempio:

$$G/s0| \frac{500/s \ 2 \ 200}{s/s \ 2 \ 20 \ s \ 2 \ 1000} |$$

$$| \frac{50 \left(\frac{s}{20} \right)}{s \left(\frac{s}{2} \right) \left(\frac{s}{2} \right) \left(\frac{s}{100} \right)} |$$





Nota bene: Il diagramma della fase inizia alle basse frequenze ($\omega \rightarrow 0$) e termina alle alte frequenze con valori multipli di 90° ($\phi/2$).

Alle basse frequenze la fase è pari a -90° moltiplicato il numero di poli nell'origine ($+90^\circ$ moltiplicato il numero di zeri nell'origine).

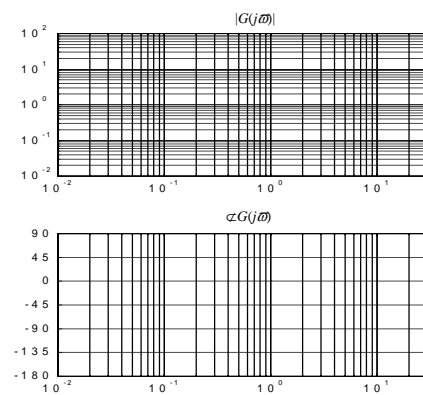
Alle alte frequenze la fase è pari a $-90^\circ(N_p - N_z)$ dove N_p è il numero di poli e N_z è il numero di zeri della funzione di trasferimento.

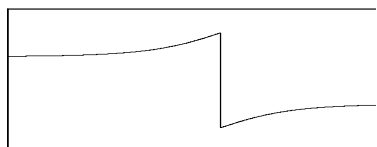
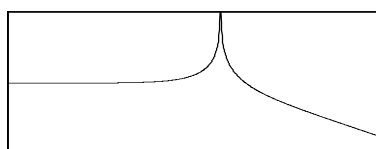
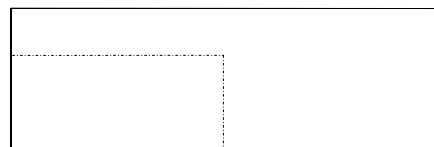
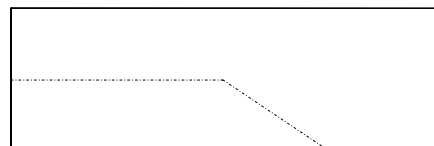
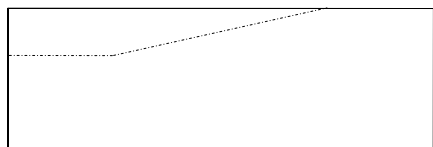
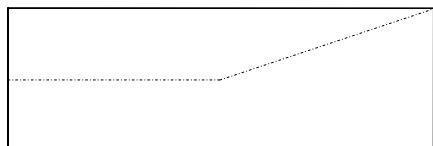
Queste relazioni valgono per i sistemi a minima rotazione di fase.



Ancora un esercizio:

$$G(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + 2s + 1}$$





Sistemi a Non Minima Rotazione di Fase

Consideriamo le seguenti quattro funzioni di trasferimento di cui disegniamo il diagramma del modulo e della fase con MATLAB

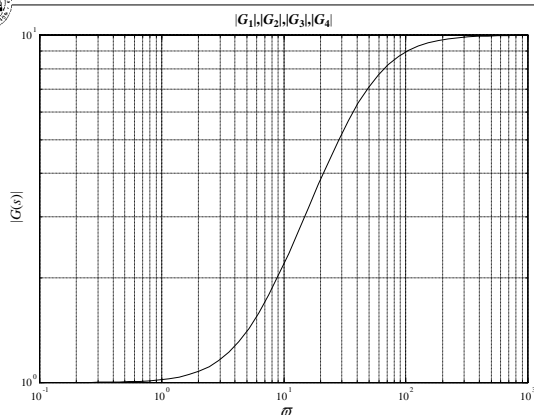


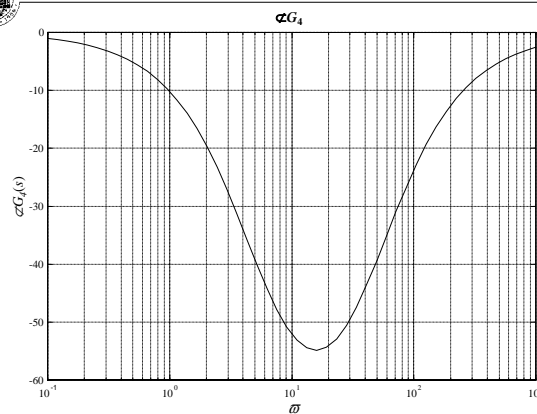
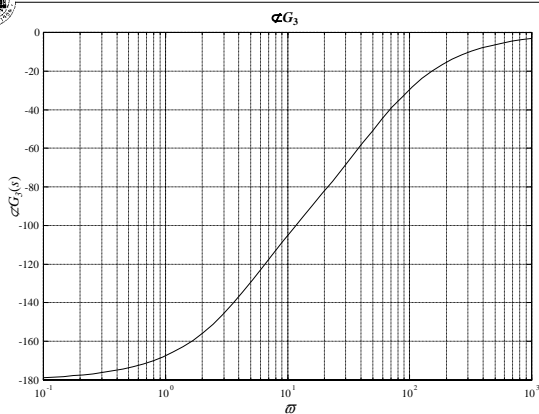
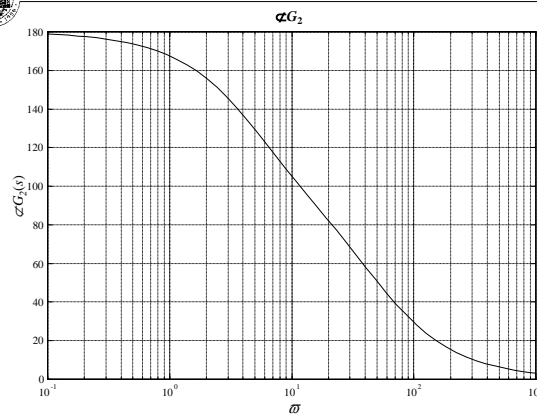
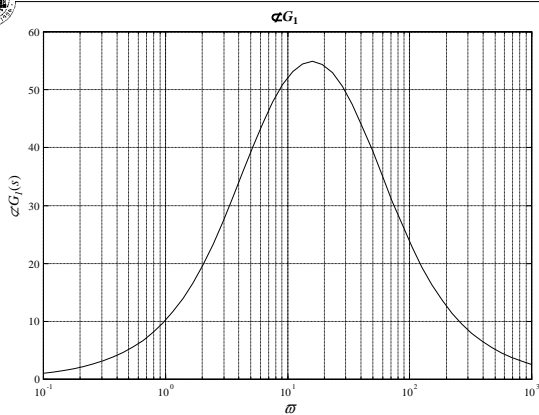
$$G_1/s0| \frac{10/s 2 50}{/s 2 500} | \frac{12 s/5}{12 s/50}$$

$$G_2/s0| \frac{10/s 4 50}{/s 2 500} | \frac{4/14 s/5^0}{12 s/50}$$

$$G_3/s0| \frac{10/s 2 50}{/s 4 500} | \frac{4/12 s/5^0}{14 s/50}$$

$$G_4/s0| \frac{10/s 4 50}{/s 4 500} | \frac{14 s/5}{14 s/50}$$





La differenza tra questi grafici è legata alla presenza o meno di poli e/o zeri nel semipiano di destra.

Quando la funzione di trasferimento è messa in forma di costanti di tempo, i termini relativi a poli e/o zeri reali nel semipiano di destra sono nella forma

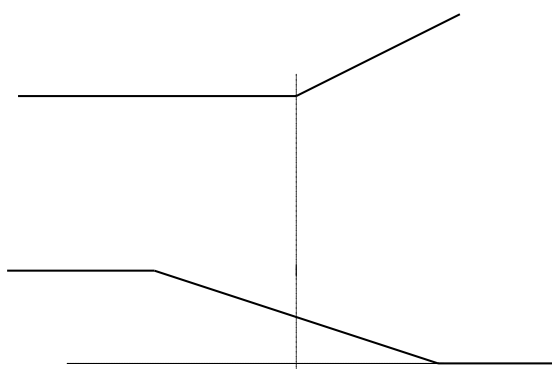
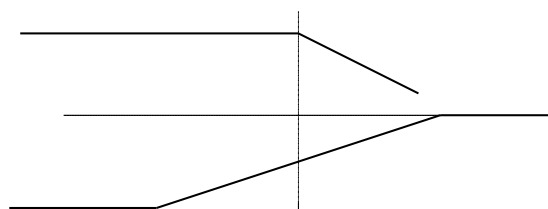
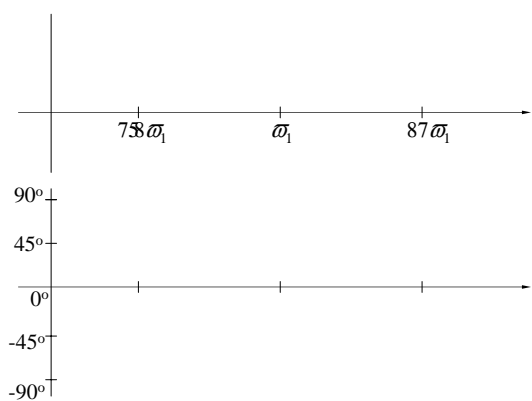
$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{R} \\ \textcircled{Z} \\ \text{TM} \end{array} \right\} 4 \frac{s}{\omega_i}$$



E' facile verificare che

$$\varphi_{14} \frac{j\omega}{\omega_1} \quad \varphi_{12} \frac{j\omega}{\omega_1}$$

da cui segue che sia i diagrammi esatti che quelli approssimati linearmente per poli e/o zeri reali nel semipiano di destra si possono ottenere come i diagrammi per poli e/o zeri nel semipiano di sinistra ma con un cambiamento di segno allo sfasamento.



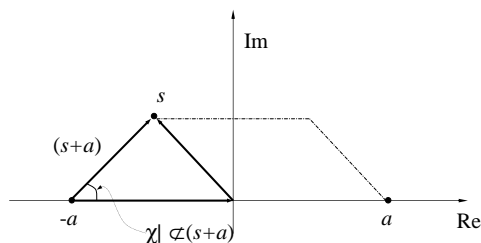
Analoga proprietà vale anche per poli e/o zeri complessi coniugati. Bisogna poi ricordarsi di sommare (o sottrarre) eventualmente la fase (180°) relativa all'eventuale guadagno negativo.



Un altro modo per determinare il diagramma della fase di tali sistemi richiede di operare nel piano complesso s dei poli e zeri della funzione di trasferimento.



Per comprendere tale procedura consideriamo la figura seguente in cui s è un generico punto del piano





Da tale figura noto a e fissato s si possono ricavare $|/(s+a)|$ e $\angle(s+a)$.

Consideriamo ora che una generica funzione di trasferimento può essere posta in forma fattorizzata

$$G/s0| \frac{K/s^2 z_1 0 /s^2 z_2 0 \dots /s^2 z_m 0}{/s^2 p_1 0 /s^2 p_2 0 \dots /s^2 p_n 0}$$



$$\left| \frac{K \prod_{i=1}^m |s - z_i| e^{j\omega/s^2 z_i 0} \dots \prod_{i=1}^m |s - z_m| e^{j\omega/s^2 z_m 0}}{\prod_{i=1}^n |s - p_i| e^{j\omega/s^2 p_i 0} \dots \prod_{i=1}^n |s - p_n| e^{j\omega/s^2 p_n 0}} \right|$$

$$\left| \frac{K \prod_{i=1}^m |s - z_i| \dots \prod_{i=1}^m |s - z_m|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i| \dots \prod_{i=1}^n |s - p_n|} \right|$$

$$e^{j\omega \angle z_1 0 \dots \angle z_m 0} \dots e^{j\omega \angle z_m 0} \dots e^{-j\omega \angle p_1 0} \dots e^{-j\omega \angle p_n 0}$$



Se si riportano sul piano s poli e zeri della funzione di trasferimento e si considerano i vettori che li uniscono ad un punto s posto sull'asse immaginario, così che $s=j\omega$, si possono valutare modulo e fase di $G(j\omega)$ per diversi valori di ω .

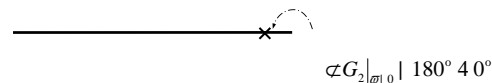
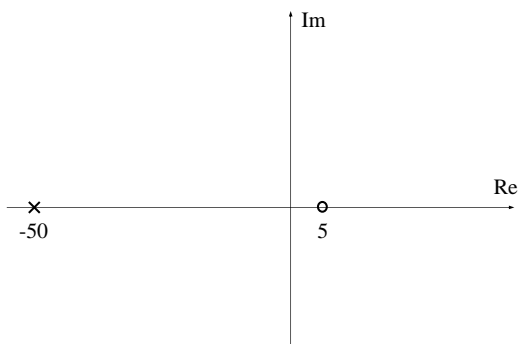


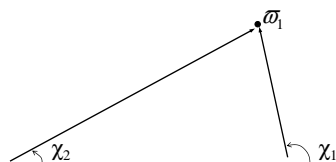
Ad esempio consideriamo il caso di

$$G_2/s0| \frac{10/s^4 5C}{/s^2 500}$$

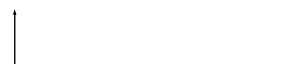
e di

$$G_3/s0| \frac{10/s^2 5C}{/s^4 500}$$





$$\angle G_2|_{\omega_1} | \chi_1 \chi_2$$



$$\angle G_2|_{\omega_1} | 90^\circ \ 4 \ 90^\circ \ | \ 0^\circ$$



Questa procedura grafica ben si addice ad una valutazione qualitativa della fase di $G(j\omega)$.

Per una valutazione quantitativa si possono avere problemi di scala (poli e/o zeri a grande distanza tra di loro).

Notare come con questo metodo appare evidente il contributo di ogni polo e/o zero alla fase complessiva di $G(j\omega)$ alle varie frequenze.



Il Metodo dello Pseudo Diagramma

Questo metodo permette di usare le tecniche viste per i sistemi a minima rotazione di fase anche per i sistemi a non minima rotazione di fase.



Ciò è possibile in quanto si applica la relazione tra pendenza del diagramma del modulo e diagramma della fase non direttamente al diagramma del modulo di $G(j\omega)$, ma al diagramma del modulo di una $G^*(j\omega)$ derivata da $G(j\omega)$.

La $G^*(j\omega)$, derivata con regole opportune, non ha alcun senso fisico particolare; rappresenta solo un artificio per derivare il diagramma della fase di $G(j\omega)$.



La procedura per derivare il diagramma della fase di $G(j\omega)$ è riassunta nei seguenti punti:

1. Dato $G(j\omega)$ a non minima rotazione di fase porla nella forma di costanti di tempo
2. Costruire $G^*(j\omega)$ da $G(j\omega)$ sostituendo:
 - ogni polo nel semipiano di destra in $s=+a$ con uno zero speculare nel semipiano di sinistra in $s=-a$.
 - ogni zero nel semipiano di destra in $s=+b$ con un polo speculare nel semipiano di sinistra in $s=-b$.



- Ricavare il diagramma della fase di $G^*(j\omega)$ (determinandone eventualmente prima il diagramma del modulo) con le regole per i sistemi a minima rotazione di fase.
- Aggiungere (o togliere) 180° al diagramma ottenuto se il guadagno di $G^*(j\omega)$ è negativo.

Il diagramma così ottenuto è quello della fase di $G(j\omega)$.



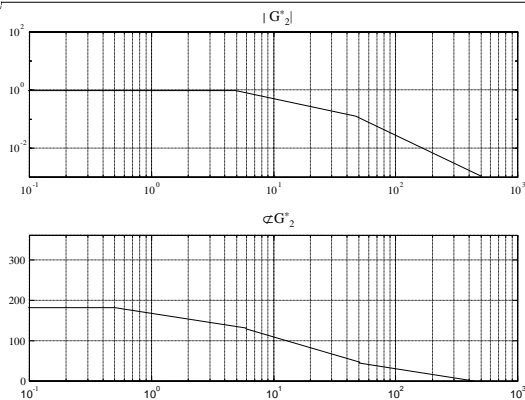
Esempio:

$$G_2/s0 \left| \frac{10/s \ 4 \ 50}{s \ 2 \ 500} \right| \frac{4/14 \ s/5}{12 \ s/50}$$

$$G_2^*/s0 \left| \frac{4 \ 1}{12 \ s/5 \ 0 \ 12 \ s/50 \ 0} \right|$$

$$G_3/s0 \left| \frac{10/s \ 2 \ 50}{s \ 4 \ 50} \right| \frac{4/12 \ s/5}{14 \ s/50}$$

$$G_3^*/s0 \left| \frac{4/12 \ s/5 \ 0 \ 12 \ s/50 \ 0}{1} \right|$$



Anche per i sistemi a non minima rotazione di fase il diagramma della fase inizia e termina a valori che sono multipli di $\pm 90^\circ$, ma in generale non valgono più le regole riportate a pagina 82 che si riferiscono ai sistemi a minima rotazione di fase.



Comandi MATLAB

```
w = logspace(n1, n2, n3);
```

```
[m, f] = bode(num, den, w);
        bode(A, B, C, D, in, w);
```

```
loglog(w, m);
```

```
semilogx(w, f);
```