Soluzioni esercitazione 6

- **Esercizio 1**

Calcola :

a) $\dfrac{2-j}{4-j}$ b) $\dfrac{3-2j}{1+2j}$ c) $\dfrac{5+5j}{1+2j}+\dfrac{20}{4+3j}$ d) $(1+j)^2-j$ e) $1+e^{2j\frac{\pi}{3}}+e^{-2j\frac{\pi}{3}}$

f) $\dfrac{j^4+j^9+j^{16}}{2-j^5+j^{10}-j^{15}}$ g) $\angle\dfrac{1+j}{1-j}$ h) $e^{j\frac{\pi}{2}}$ m) $e^{j\pi}$ n) $e^{-j\frac{\pi}{4}}$

Soluzione:

a) $\dfrac{2-3j}{4-j}=\dfrac{(2-3j)(4+j)}{(4-j)(4+j)}=\dfrac{8+2j-12j+3}{17}=\dfrac{11}{17}-j\dfrac{10}{17}$

b) $\left|\dfrac{3-2j}{1+2j}\right|=\dfrac{\sqrt{9+4}}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{\dfrac{13}{5}}$

$d)$ $(i+j)^2-j=1+2j+j^2-j=j$

$e)$ $1+e^{2j\frac{\pi}{3}+e^{-2j\frac{\pi}{3}}}=1+2\,\mathrm{Re}\,e^{2j\frac{\pi}{3}}=1+2\cos\dfrac{2\pi}{3}=0$

$m)$ $e^{j\pi}=\cos\pi+jsen\pi=-1$

- **Esercizio 2**

Esprimere in forma esponenziale

a) 2-2j b) $-1+j\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{2}+j2\sqrt{2}$ d) -j e) -4 f) $-2\sqrt{3}-j2$ g) $\sqrt{2}$

h) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-j\dfrac{3}{2}$

Soluzione

$h)$ $\mathrm{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-j\dfrac{3}{2}$

$|a|=\sqrt{\dfrac{3}{4}+\dfrac{9}{4}}=\sqrt{3}$

$\angle a=arctg\left(-\dfrac{3}{\sqrt{3}}\right)$

a nel 4 quadrante: $\angle a=-\dfrac{\pi}{3}\bullet a=\sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}e^{j\frac{5}{3}\pi}$

Data ultima revisione 12/03/2004
Autore: Roberto Graglia

- **Esercizio 3**

Calcolare modulo e fase

a)1-j b)-j c)-3 d)-1-j e)$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{j}{2}$

Soluzione:

$$e)\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{j}{2}$$

$$|a| = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$$

$$\langle a = arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\text{a nel secondo quadrante:}\quad \langle a = \frac{5}{6}\pi$$

- **Esercizio 4**

Determinare i fasori relativi alle seguenti funzioni sinusoidali

f_1(t)= $-3\sin(\omega t+\frac{\pi}{6})$ f_2(t)= $-\sin(-\omega t+\frac{2\pi}{15})$

f_3(t)= $\sin^2(\omega t)$ f_4(t)= $\frac{d^3}{dt^3}\sin(\omega t+\frac{\pi}{6})$

Soluzione:

$$f_1(t) = -3\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right) \to F_1 = -3(-j)e^{j\frac{\pi}{6}} = 3\ ,\ 120^\circ$$

$$f_4(t) = \frac{d^3}{dt^3}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right) \to F_4 = (j\omega)^3\left(-je^{j\frac{\pi}{6}}\right) = j\omega^3 e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{\pi}{6}} = -j\omega^3 e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

$$f_3(t) = \sin^2\omega t = \frac{1}{2}-\frac{\cos 2\omega}{2}\quad \text{non si può rappresentare come fasore poiché non é una funzione sinusoidale}$$

- **Esercizio 5**

Determinare il valore efficace e la fase delle seguenti funzioni sinusoidali, servendosi della rappresentazione dei fasori

$f_1 = \cos(\omega t) - \sin(\omega t)$ $\quad f_2 = \frac{d^{10}}{dt^{10}}\sin(-3t + \frac{\pi}{4})$

Soluzione:

$$f_1 = \cos\omega t - sen\omega t \rightarrow F_1 = 1 + j \quad F_m = |F_1| = \sqrt{2}$$

$$F_e = \frac{F_m}{\sqrt{2}} = 1 \quad \langle F_1 = arctg 1$$

$$\langle \mathrm{F}_1 = 45^\circ$$

Conferma:

$$f = \sqrt{2}\left(\cos 45^\circ \cos\omega t - \sin 45^\circ \sin\omega t\right) = \sqrt{2}\cos\left(\omega t + 45^\circ\right)$$

$$f_2 = \frac{d^{10}}{dt^{10}} sen(-3t + \frac{\pi}{4}) = -\frac{d^{10}}{dt^{10}} sen(3t - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow$$

$$F_2 = -(j3)^{10}(-j)e^{-j\frac{\pi}{4}} = +j^{10}3^{10} je^{-j\frac{\pi}{4}} =$$

$$= (-1)^5 j3^{10} e^{-j\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -j3^{10} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}} =$$

$$= 3^{10} e^{-\frac{3}{4}\pi j}$$

- **Esercizio 6**

Determinare le funzioni sinusoidali associate ai seguenti fasori

$F_1=10$ $\quad F_2=j10$ $\quad F_3=10-j10$ $\quad F_4=-5e^{-j\frac{\pi}{3}}$

Soluzione:

$$F_3 = 10 - j10$$

$$f_3(t) = \mathrm{Re}\left(F_3 e^{j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left[(10 - j10)(\cos\omega t + jsen\omega t)\right] = 10\cos\omega t + 10 sen\omega t$$