Schede di Elettrotecnica

Corso di Elettrotecnica 1 - Cod. 9200 N
Diploma Universitario Teledidattico in
Ingegneria Informatica ed Automatica
Polo Tecnologico di Alessandria

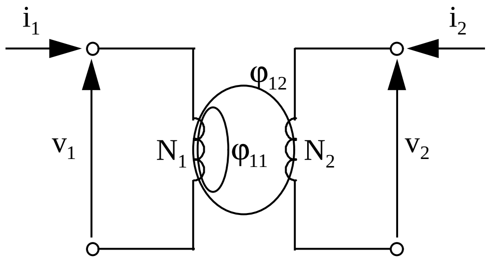
A cura di Luca FERRARIS

Scheda N° 15

Circuiti mutuamente accoppiati

CIRCUITI MUTUAMENTE ACCOPPIATI

Si parla di circuiti magneticamente accoppiati quando l'accoppiamento tra 2 maglie avviene attraverso un campo magnetico.
La corrente variabile i_1 genera un flusso magnetico φ_1; una parte di φ_1 si concatena solo con l'avvolgimento 1 (φ_{11}), il restante flusso si concatena anche con l'avvolgimento 2 (φ_{12}).



Nell'avvolgimento 2 viene quindi indotta una tensione v_2:

$$v_2 = N_2 \cdot \frac{d\varphi_{12}}{dt};$$

poiché φ_{12} è legato alla corrente i_1, v_2 sarà proporzionale alla rapidità di variazione di i_1:

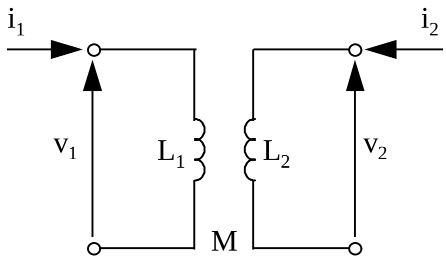
$v_2 = M \cdot \frac{di_1}{dt}$, dove M è denominata *mutua induttanza* fra i due avvolgimenti.

In definitiva si ottiene: $$v_2 = N_2 \cdot \frac{d\varphi_{12}}{dt} = M \cdot \frac{di_1}{dt}$$

L'accoppiamento mutuo è simmetrico rispetto ai due avvolgimenti, e risultati analoghi si ottengono facendo circolare una corrente variabile i_2 nell'avvolgimento 2.

Le equazioni generali per due circuiti mutuamente accoppiati sono le seguenti:

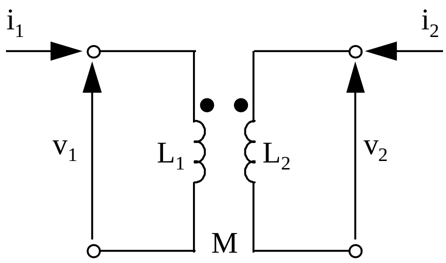
$$\begin{cases} v_1 = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} \pm M \cdot \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} \pm M \cdot \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$



Le tensioni dovute a mutua induttanza possono essere di segno uguale o opposto a quelle di auto induttanza a seconda del senso di avvolgimento delle spire. Per definirne i segni esatti si deve applicare la regola della "mano destra" per ciascuno degli avvolgimenti percorsi da corrente, e verificare se i flussi (definiti dalla direzione del "pollice") sono tra loro concordi (segno "+") o discordi (segno "-").

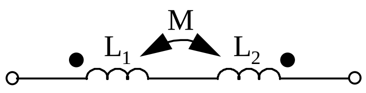
Su ciascun avvolgimento viene segnato un punto (•) in corrispondenza ai terminali che presentano la stessa polarità quando si tenga conto della sola mutua induzione; a questo punto, quando entrambe le correnti entrano (o escono) da due avvolgimenti accoppiati attraverso i terminali contrassegnati con punti, i segni dei termini di mutua induttanza M sono identici a quelli di auto induttanza L.
Pertanto, fissando le convenzioni di segno degli utilizzatori ai morsetti contrassegnati con il pallino • si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

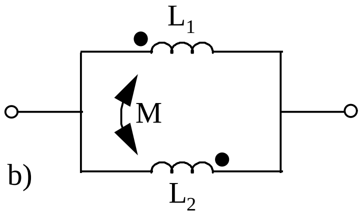


ESERCIZIO 15.1

Valutare l'impedenza Z per i bipoli in figura.

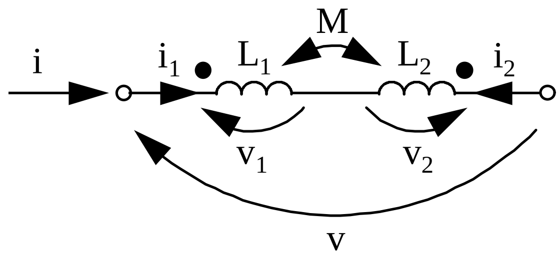


a)



b)

Bipolo a):



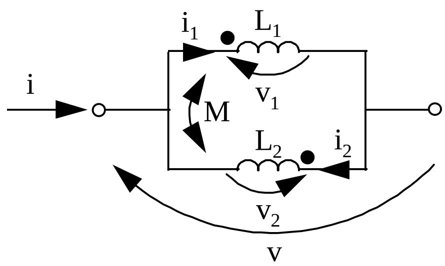
$$\begin{cases}\vec{V}_1 = j\omega L_1 \cdot \vec{I}_1 + j\omega M \cdot \vec{I}_2 \\ \vec{V}_2 = j\omega M \cdot \vec{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \vec{I}_2\end{cases}$$

ma $\vec{I} = \vec{I}_1 = -\vec{I}_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\vec{V}_1 = j\omega L_1 \cdot \vec{I} - j\omega M \cdot \vec{I} \\ \vec{V}_2 = j\omega M \cdot \vec{I} - j\omega L_2 \cdot \vec{I}\end{cases}$

$$\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = j\omega \cdot (L_1 - M - M + L_2) \cdot \vec{I} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Z_{eq} = j\omega \cdot (L_1 + L_2 - 2M)}$$

Bipolo b):



$$\begin{cases}\vec{V}_1 = j\omega L_1 \cdot \vec{I}_1 + j\omega M \cdot \vec{I}_2 \\ \vec{V}_2 = j\omega M \cdot \vec{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \vec{I}_2\end{cases}$$

ma $\begin{cases}\vec{I} = \vec{I}_1 - \vec{I}_2 \\ \vec{V}_1 = -\vec{V}_2\end{cases} \quad \Rightarrow$

$$\vec{V}_1 = -\vec{V}_2 \quad \Rightarrow \quad L_1\vec{I}_1 + M\vec{I}_2 = -M\vec{I}_1 - L_2\vec{I}_2 \quad \Rightarrow \quad (L_1 + M)\vec{I}_1 + (L_2 + M)\vec{I}_2 = 0$$

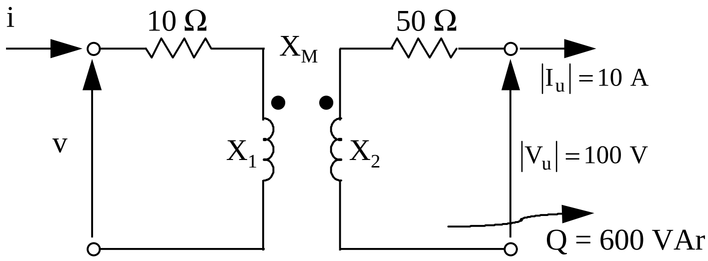
$$\vec{I}_1 = \vec{I} + \vec{I}_2 \quad \Rightarrow \quad (L_1 + M)\left(\vec{I} + \vec{I}_2\right) + (L_2 + M)\vec{I}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{I}_2 = -\frac{(L_1 + M)}{(L_1 + L_2 + 2M)} \cdot \vec{I}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_1 = L_1\vec{I}_1 + M\vec{I}_2 = L_1\left(\vec{I} + \vec{I}_2\right) + M\vec{I}_2 = L_1\vec{I} + (L_1 + M)\vec{I}_2 = L_1\vec{I} - \frac{(L_1 + M)^2}{(L_1 + L_2 + 2M)} \cdot \vec{I}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Z_{eq} = j\omega \cdot \frac{\left(L_1 L_2 - M^2\right)}{(L_1 + L_2 + 2M)}}$$

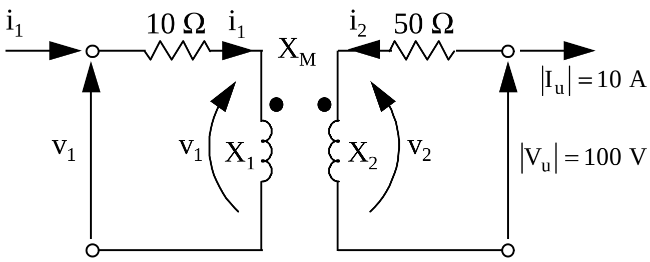
ESERCIZIO 15.2

Determinare $\vec{V}$ ed $\vec{I}$ all'ingresso.



- $X_1 = 25\ \Omega$
- $X_2 = 40\ \Omega$
- $X_M = 10\ \Omega$

Equazioni di accoppiamento magnetico:



$$\begin{cases} \vec{V}_1 = j\omega L_1 \cdot \vec{I}_1 + j\omega M \cdot \vec{I}_2 \\ \vec{V}_2 = j\omega M \cdot \vec{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \vec{I}_2 \end{cases}$$

$$S = |V_u| \cdot |I_u| = 1000 \text{ VA} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{sen}\varphi = 0{,}6 \\ \cos\varphi = 0{,}8 \end{cases}$$

Ponendo $\vec{I}_u$ sull'asse reale si ha:

$$\vec{V}_u = 80 + j \cdot 60 \text{ V}$$

Dalla maglia del circuito di destra:

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_u + R \cdot \vec{I}_u = (580 + j \cdot 60) \text{ V}$$

Dalla 2ª equazione di accoppiamento magnetico:

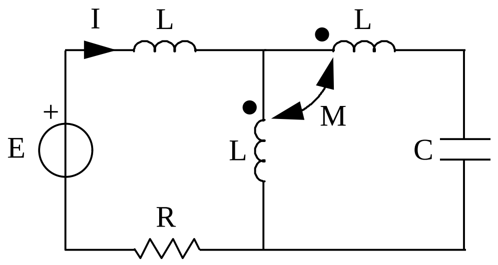
$$\vec{I} = \vec{I}_1 = \frac{\vec{V}_2 - j \cdot X_2 \vec{I}_2}{j \cdot X_M} = (46 - j \cdot 58) \text{ A}$$

Quindi:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + R \cdot \vec{I} = j \cdot X_1 \vec{I} - j \cdot X_M \vec{I}_u + R \cdot \vec{I} = (1910 + j \cdot 470) \text{ V}$$

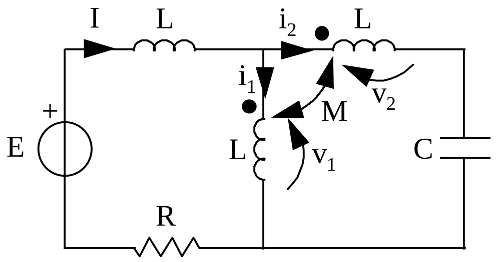
ESERCIZIO 15.3

Determinare P e Q erogate dal generatore sinusoidale E:



- E = 10 V
- $X_M = 1\ \Omega$
- $R = X_C = X_L = 2\ \Omega$

Equazioni di accoppiamento magnetico:



$$\begin{cases} v_1 = j2 \cdot i_1 + j \cdot i_2 & (1) \\ v_2 = j \cdot i_1 + j2 \cdot i_2 & (2) \end{cases}$$

Vincoli circuitali:

$$\begin{cases} v_1 = v_2 + i_2 \cdot \left(-j \cdot X_C\right) = v_2 - j2 \cdot i_2 & (3) \\ i = i_1 + i_2 & (4) \end{cases}$$

Dalla eq. (3):

$$v_1 = v_2 - j2 \cdot i_2 = j \cdot i_1 \qquad (5)$$

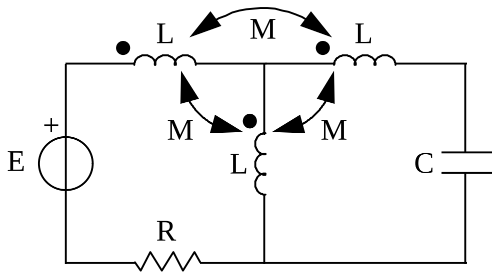
Dalla eq. (1):

$$v_1 = j \cdot i_1 = j2 \cdot i_1 + j \cdot \left(i - i_1\right) \quad \Rightarrow \quad i = 0$$

Perciò dal generatore non viene prelevata alcuna potenza.

ESERCIZIO 15.4

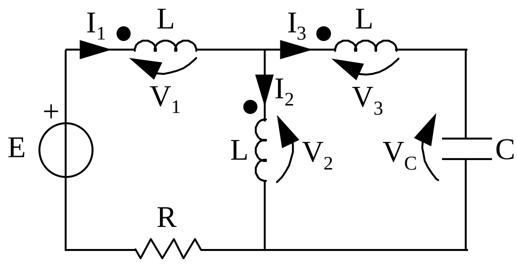
Determinare la corrente nel condensatore C.



- $E = 10$ V
- $X_M = 1\ \Omega$
- $R = X_C = X_L = 2\ \Omega$

Equazione di equilibrio al nodo:

$$I_1 = I_2 + I_3$$



$$\begin{cases} V_1 = j\omega \cdot \left[LI_1 + MI_2 + MI_3\right] = j\omega(L+M)I_1 \\ V_2 = j\omega \cdot \left[LI_2 + MI_1 + MI_3\right] = j\omega\left[(L+M)I_2 + 2MI_3\right] \\ V_3 = j\omega \cdot \left[LI_3 + MI_1 + MI_2\right] = j\omega\left[(L+M)I_3 + 2MI_2\right] \end{cases}$$

$$V_C = X_C I_3$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{V}_1 + \vec{V}_3 + \vec{V}_C + R \cdot \vec{I}_1 = \\ &= j\omega \cdot (L+M)\vec{I}_1 + j\omega \cdot (L+M)\vec{I}_3 + 2M\vec{I}_2 - jX_C\vec{I}_3 + R \cdot \vec{I}_1 = \\ &= (2+j5)\vec{I}_2 + (2+j4)\vec{I}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + R \cdot \vec{I}_1 = \\ &= j\omega \cdot (L+M)I_1 + j\omega \cdot (L+M)I_2 + 2MI_3 + R \cdot I_1 = \\ &= (2+j6)\vec{I}_2 + (2+j5)\vec{I}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 10 = (2+j5)\vec{I}_2 + (2+j4)\vec{I}_3 \\ 10 = (2+j6)\vec{I}_2 + (2+j5)\vec{I}_3 \end{cases}$$

da cui:

$$\boxed{\vec{I}_3 = j \cdot 10\ \text{A}}$$