Schede di Elettrotecnica

Corso di Elettrotecnica 1 - Cod. 9200 N
Diploma Universitario Teledidattico in
Ingegneria Informatica ed Automatica
Polo Tecnologico di Alessandria

A cura di Luca FERRARIS

Scheda N° 12

Doppi Bipoli in Corrente Alternata:

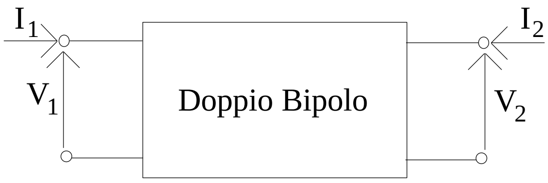
- Matrice Z delle impedenze
- Matrice Y delle ammettenze

DOPPI BIPOLI IN CORRENTE ALTERNATA

Un doppio bipolo è un elemento di circuito a quattro morsetti.

La corrente I_1 entrante nel morsetto superiore della porta 1 deve essere uguale alla corrente uscente dal morsetto inferiore della stessa porta.

Si assumono le convenzioni di segno degli utilizzatori, come indicato nella figura sottostante.



Concettualmente non c'è niente di nuovo rispetto a quanto già visto in corrente continua, salvo il fatto che le grandezze in gioco in questo caso sono di natura complessa; il sistema di equazioni che regge il funzionamento di un doppio bipolo è il seguente:

$$\boxed{\begin{cases} \vec{V}_1 = Z_{11} \cdot \vec{I}_1 + Z_{12} \cdot \vec{I}_2 \\ \vec{V}_2 = Z_{21} \cdot \vec{I}_1 + Z_{22} \cdot \vec{I}_2 \end{cases}}$$

da cui si può ricavare la matrice Z delle impedenze: $\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$;

per ricavare i vari parametri Z_{ij} si deve immaginare di applicare un generatore di corrente entrante in una coppia di morsetti (mantenendo gli altri aperti) e di misurare la tensione alla coppia di morsetti opportuna.

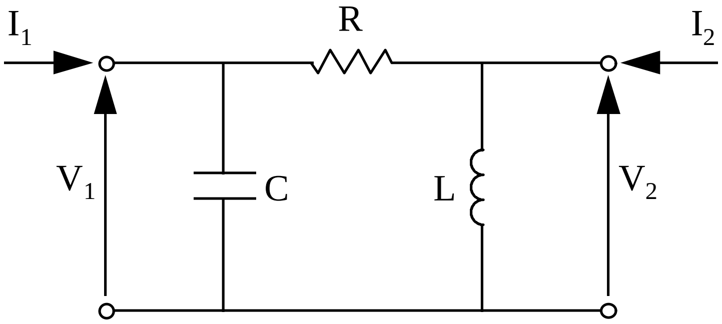
Il sistema di equazioni che regge il funzionamento di un doppio bipolo può anche essere:

$$\boxed{\begin{cases} \vec{I}_1 = Y_{11} \cdot \vec{V}_1 + Y_{12} \cdot \vec{V}_2 \\ \vec{I}_2 = Y_{21} \cdot \vec{V}_1 + Y_{22} \cdot \vec{V}_2 \end{cases}}$$

da cui si può ricavare la matrice Y delle ammettenze: $\begin{matrix} Y & \\ Y & Y \end{matrix}$

per ricavare i vari parametri Y si deve immaginare di applicare un generatore di tensione ad una coppia di morsetti (e di corto
morsetti opportuna.

ESERCIZIO



$$\begin{cases} \vec{V}_1 = Z_{11} \cdot \vec{I}_1 + Z_{12} \cdot \vec{I}_2 \\ \vec{V}_2 = Z_{21} \cdot \vec{I}_1 + Z_{22} \cdot \vec{I}_2 \end{cases}$$

$$Z_{11} = \left(\frac{\vec{V}_1}{\vec{I}_1} \right)_{\vec{I}_2 = 0} = \frac{-j \cdot X_C \cdot (R + j \cdot X_L)}{R + j \cdot (X_L - X_C)} = \quad \ldots \quad = \frac{R \cdot X_C^2 - j \cdot \left(R^2 \cdot X_C + X_L^2 \cdot X_C - X_L \cdot X_C^2 \right)}{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$Z_{12} = \left(\frac{\vec{V}_1}{\vec{I}_2} \right)_{\vec{I}_1 = 0}$$

Partitore di corrente: $\vec{I}_C = \dfrac{j \cdot X_L}{R + j \cdot (X_L - X_C)} \cdot \vec{I}_2$

Tensione su C: $\vec{V}_1 = \vec{V}_C = -j \cdot X_C \cdot \vec{I}_C = \dfrac{X_C \cdot X_L}{R + j \cdot (X_L - X_C)} \cdot \vec{I}_2$

$$Z_{12} = \frac{\vec{V}_1}{\vec{I}_2} = \frac{X_C \cdot X_L}{R + j \cdot (X_L - X_C)}$$

$$Z_{21} = \left(\frac{\vec{V}_2}{\vec{I}_1} \right)_{\vec{I}_2 = 0}$$

Partitore di corrente: $\vec{I}_L = \dfrac{-j \cdot X_C}{R + j \cdot (X_L - X_C)} \cdot \vec{I}_1$

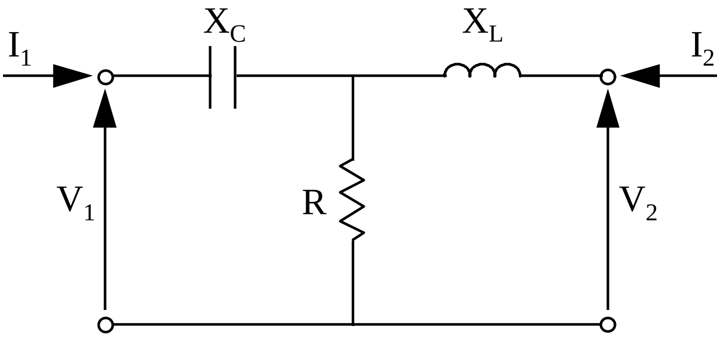
Tensione su L: $\vec{V}_2 = \vec{V}_L = j \cdot X_L \cdot \vec{I}_L = \dfrac{X_C \cdot X_L}{R + j \cdot (X_L - X_C)} \cdot \vec{I}_1$

$$Z_{21} = \frac{\vec{V}_2}{\vec{I}_1} = \frac{X_C \cdot X_L}{R + j \cdot (X_L - X_C)} = Z_{12}$$

$$Z_{22} = \left(\frac{\vec{V}_2}{\vec{I}_2} \right)_{\vec{I}_1 = 0} = \frac{j \cdot X_L \cdot (R - j \cdot X_C)}{R + j \cdot (X_L - X_C)} = \frac{X_L \cdot X_C + j \cdot R \cdot X_L}{R + j \cdot (X_L - X_C)} = \quad \ldots$$

ESERCIZIO 12.2

Determinare la matrice Z per il doppio bipolo illustrato in figura, con i seguenti valori dei parametri:



- $R = 2\ \Omega$
- $X_L = 5\ \Omega$
- $X_C = 3\ \Omega$

$$\begin{cases} \vec{V}_1 = Z_{11} \cdot \vec{I}_1 + Z_{12} \cdot \vec{I}_2 \\ \vec{V}_2 = Z_{21} \cdot \vec{I}_1 + Z_{22} \cdot \vec{I}_2 \end{cases}$$

$$Z_{11} = \left(\frac{\vec{V}_1}{\vec{I}_1} \right)_{\vec{I}_2 = 0} = R - j \cdot X_C = (2 - j \cdot 3)\ \Omega$$

$$Z_{12} = \left(\frac{\vec{V}_1}{\vec{I}_2} \right)_{\vec{I}_1 = 0} = R = 2\ \Omega$$

$$Z_{21} = \left(\frac{\vec{V}_2}{\vec{I}_1} \right)_{\vec{I}_2 = 0} = R = 2\ \Omega$$

$$Z_{22} = \left(\frac{\vec{V}_2}{\vec{I}_2} \right)_{\vec{I}_1 = 0} = R + j \cdot X_L = (2 + j \cdot 5)\ \Omega$$

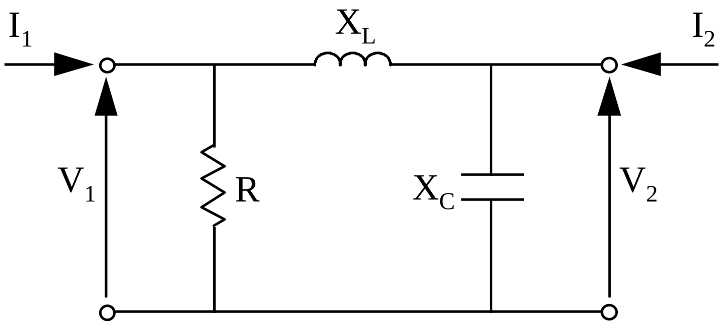
Matrice risultante:

$$Z = \begin{bmatrix} 2 - j \cdot 3 & 2 \\ 2 & 2 + j \cdot 5 \end{bmatrix} \Omega$$

ESERCIZIO 12.3

Determinare la matrice Z per il doppio bipolo illustrato in figura, con i seguenti valori dei parametri:

- $R = 10\ \Omega$
- $X_L = 8\ \Omega$
- $X_C = 6\ \Omega$



$$Z_{11} = \left(\frac{\vec{V}_1}{\vec{I}_1}\right)_{\vec{I}_2=0} = \frac{R\cdot j\cdot(X_L - X_C)}{R + j\cdot(X_L - X_C)} = \frac{10\cdot j2}{10 + j\cdot 2} = (0{,}38 - j\cdot 1{,}92)\ \Omega$$

$$Z_{12} = \left(\frac{\vec{V}_1}{\vec{I}_2}\right)_{\vec{I}_1=0}$$

Partitore di corrente: $\vec{I}_R = \dfrac{j\cdot X_C}{R + j\cdot(X_L - X_C)}\cdot\vec{I}_2 = \dfrac{-j\cdot 6}{10 + j\cdot 2}\cdot\vec{I}_2$

Tensione su R: $\vec{V}_1 = \vec{V}_R = R\cdot\vec{I}_R = 10\cdot\dfrac{-j\cdot 6}{10 + j\cdot 2}\cdot\vec{I}_2$

$$Z_{12} = \frac{\vec{V}_1}{\vec{I}_2} = \frac{-j\cdot 60}{10 + j\cdot 2} = -(1{,}15 + j\cdot 5{,}77)\ \Omega$$

$$Z_{21} = \left(\frac{\vec{V}_2}{\vec{I}_1}\right)_{\vec{I}_2=0}$$

Partitore di corrente: $\vec{I}_C = \dfrac{R}{R + j\cdot(X_L - X_C)}\cdot\vec{I}_1 = \dfrac{10}{10 + j\cdot 2}\cdot\vec{I}_1$

Tensione su C: $\vec{V}_2 = \vec{V}_C = -j\cdot X_C\cdot\vec{I}_C = -j\cdot 6\cdot\left(\dfrac{10}{10 + j\cdot 2}\cdot\vec{I}_1\right)$

$$Z_{21} = \frac{\vec{V}_2}{\vec{I}_1} = \frac{-j\cdot 60}{10 + j\cdot 2} = -(1{,}15 + j\cdot 5{,}77)\ \Omega$$

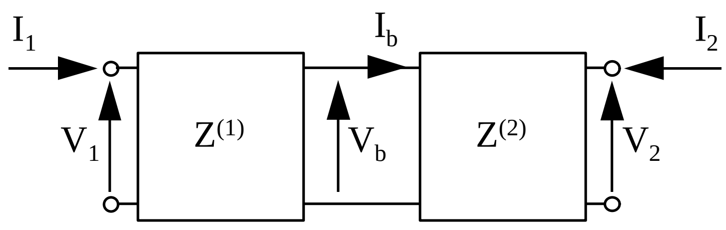
$$Z_{22} = \left(\frac{\vec{V}_2}{\vec{I}_2}\right)_{\vec{I}_1=0} = \frac{-j\cdot X_C\cdot(R + j\cdot X_L)}{R + j\cdot(X_L - X_C)} = \frac{-j\cdot 6\cdot(10 + j\cdot 8)}{10 + j\cdot 2} = (3{,}46 - j\cdot 6{,}69)\ \Omega$$

Matrice risultante:

$$Z = \begin{bmatrix} (0{,}38 - j\cdot 1{,}92) & -(1{,}15 + j\cdot 5{,}77) \\ -(1{,}15 + j\cdot 5{,}77) & (3{,}46 - j\cdot 6{,}69) \end{bmatrix}\ \Omega$$

ESERCIZIO 12.4

Supponendo di conoscere $Z_{ij}^{(1)}$ e $Z_{ij}^{(2)}$, determinare i parametri $Z_{ij}^{(t)}$ per la struttura complessiva rappresentata in figura.



$$Z_{11}^{(t)} = \left(\frac{\vec{V}_1}{\vec{I}_1} \right)_{\vec{I}_2 = 0}$$

Matrice $Z^{(2)}$: $\quad \vec{I}_2 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{V}_b = Z_{11}^{(2)} \cdot \vec{I}_b \;\Rightarrow\; \vec{I}_b = \dfrac{\vec{V}_b}{Z_{11}^{(2)}}$ (eq. 1)

Matrice $Z^{(1)}$: $\quad \begin{cases} \vec{V}_1 = Z_{11}^{(1)} \cdot \vec{I}_1 - Z_{12}^{(1)} \cdot \vec{I}_b \\ \vec{V}_b = Z_{21}^{(1)} \cdot \vec{I}_1 - Z_{22}^{(1)} \cdot \vec{I}_b \end{cases}$ (eq. 2)

da cui, per l'eq. 1: $\quad \vec{V}_b = Z_{11}^{(2)} \cdot \vec{I}_b = Z_{21}^{(1)} \cdot \vec{I}_1 - Z_{22}^{(1)} \cdot \vec{I}_b$ quindi:

$$\vec{I}_b = \frac{Z_{21}^{(1)}}{Z_{11}^{(2)} + Z_{22}^{(1)}} \cdot \vec{I}_1 \qquad \text{(eq. 3)}$$

che, sostituita nella eq. 2: $\quad \vec{V}_1 = Z_{11}^{(1)} \cdot \vec{I}_1 - Z_{12}^{(1)} \cdot \dfrac{Z_{21}^{(1)}}{Z_{11}^{(2)} + Z_{22}^{(1)}} \cdot \vec{I}_1$

$$\boxed{Z_{11}^{(t)} = \left(\frac{\vec{V}_1}{\vec{I}_1} \right)_{\vec{I}_2 = 0} = Z_{11}^{(1)} - \frac{Z_{12}^{(1)} \cdot Z_{21}^{(1)}}{Z_{11}^{(2)} + Z_{22}^{(1)}}}$$

$$Z_{12}^{(t)} = \left(\frac{\vec{V}_1}{\vec{I}_2} \right)_{\vec{I}_1 = 0}$$

Matrice $Z^{(1)}$: $\quad \vec{I}_1 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \vec{V}_1 = -Z_{12}^{(1)} \cdot \vec{I}_b \\ \vec{V}_b = -Z_{22}^{(1)} \cdot \vec{I}_b \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} \vec{I}_b = -\dfrac{\vec{V}_1}{Z_{12}^{(1)}} \\ \vec{V}_b = \vec{V}_1 \cdot \dfrac{Z_{22}^{(1)}}{Z_{12}^{(1)}} \end{cases}$ (eq. 4)

Matrice $Z^{(2)}$: $\quad \vec{V}_b = Z_{11}^{(2)} \cdot \vec{I}_b + Z_{12}^{(2)} \cdot \vec{I}_2$

e con l'eq. 4: $\quad \vec{V}_1 \cdot \dfrac{Z_{22}^{(1)}}{Z_{12}^{(1)}} = Z_{11}^{(2)} \cdot \left(-\dfrac{\vec{V}_1}{Z_{12}^{(1)}} \right) + Z_{12}^{(2)} \cdot \vec{I}_2$

$$\vec{V}_1 \cdot \left(\frac{Z_{22}^{(1)} + Z_{11}^{(2)}}{Z_{12}^{(1)}} \right) = Z_{12}^{(2)} \cdot \vec{I}_2$$

$$\boxed{Z_{12}^{(t)} = \left(\frac{\vec{V}_1}{\vec{I}_2} \right)_{\vec{I}_1 = 0} = \left(\frac{Z_{12}^{(1)} \cdot Z_{12}^{(2)}}{Z_{22}^{(1)} + Z_{11}^{(2)}} \right)}$$

$$\boxed{Z_{22}^{(t)} = \left(\frac{\vec{V}_2}{\vec{I}_2} \right)_{\vec{I}_1 = 0} = Z_{22}^{(2)} - \frac{Z_{12}^{(2)} \cdot Z_{21}^{(2)}}{Z_{11}^{(2)} + Z_{22}^{(1)}}}$$