

Schede di Elettrotecnica

*Corso di Elettrotecnica 1 - Cod. 9200 N
Diploma Universitario Teledidattico in
Ingegneria Informatica ed Automatica
Polo Tecnologico di Alessandria*

A cura di Luca FERRARIS

Scheda N° 10

Circuiti in Corrente Alternata:

- Potenze
- Rifasamento

POTENZA in regime alternato

Poiché la tensione e la corrente non sono in fase come nel caso della corrente continua oltre alla *potenza attiva P* (che possiamo pensare come il prodotto scalare della tensione e della corrente rappresentato perciò da grandezze in fase ovvero da segmenti paralleli nel diagramma polare) esiste anche la *potenza reattiva Q* (che possiamo pensare come il prodotto tra la tensione e la componente della corrente sfasata di 90° ovvero come il prodotto di segmenti perpendicolari nel diagramma polare) ed anche la *potenza apparente A* (prodotto dei valori efficaci della tensione e della corrente, ovvero composizione delle potenze attive e reattive).

la potenza istantanea è il prodotto di $v(t)$ e $i(t)$:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = \hat{V} \sin(\omega t) \cdot \hat{I} \sin(\omega t - \varphi) = \dots = VI \cdot \cos\varphi \cdot [1 - \cos 2\omega t] + VI \cdot \sin\varphi \cdot \sin 2\omega t$$

dove: il 1° termine è sempre positivo, con valor medio = $VI \cdot \cos\varphi$

il 2° termine è una senoide a frequenza doppia di ampiezza = $VI \cdot \sin\varphi$

Si definiscono:

$$P = VI \cdot \cos\varphi \quad \text{attiva}$$

$$Q = VI \cdot \sin\varphi \quad \text{reattiva (viene alternativamente assorbita e ceduta dai bipoli)}$$

$$A = VI \quad \text{apparente}$$

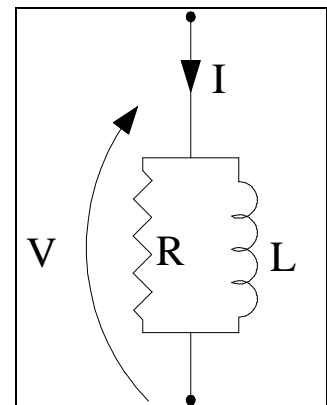
Riferendosi per esempio alla Fig. 10.1 si ha:

$$P = \vec{V} \cdot \vec{I} = |\vec{V}| \cdot |\vec{I}| \cdot \cos(\varphi) = R \cdot I^2 = \frac{V^2}{R}$$

$$Q = \vec{V} \wedge \vec{I} = |\vec{V}| \cdot |\vec{I}| \cdot \sin(\varphi) = X \cdot I^2 = \frac{V^2}{X}$$

$$A = |\vec{V}| \cdot |\vec{I}| = \sqrt{V^2 + I^2}$$

Guardando le figure 10.1 e 10.2 con dipoli reattivi in serie ed in parallelo si nota come bisogna porre particolare attenzione alla scelta della corrente e della tensione che devono essere quelle che interessano il dipolo in questione.



Attenzione al *segno della potenza*:

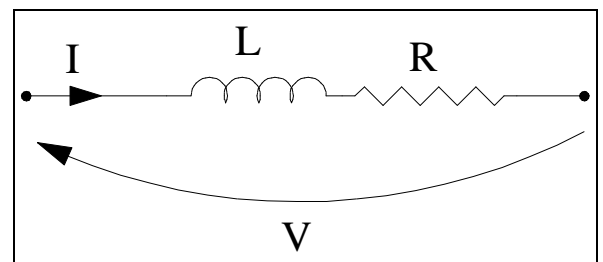
- le resistenze assorbono sempre potenza attiva segno +
- le induttanze assorbono sempre potenza reattiva segno +
- i condensatori generano sempre potenza reattiva segno -

La potenza attiva si misura in Watt [W]

La potenza reattiva in Volt-Ampere-reattivi [VAr]

La potenza apparente in Volt-Ampere [VA]

La potenza attiva generata da più bipoli è pari alla somma algebrica delle potenze generate singolarmente dai vari dipoli; discorso analogo vale per le potenze reattive, *non* vale invece per le potenze apparenti.



RIFASAMENTO

La potenza assorbita da carichi industriali è normalmente di tipo ohmico-induttivo (motori...).

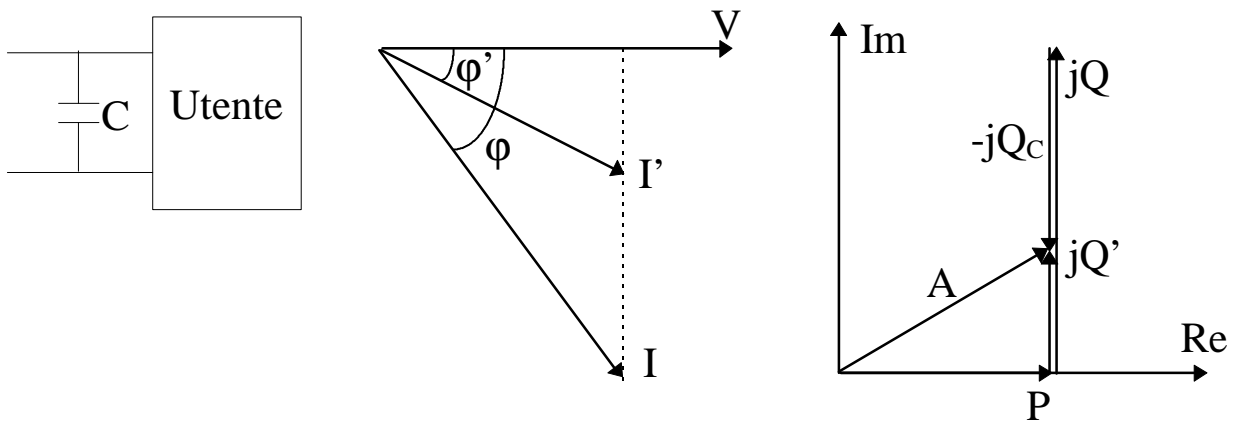
Nel complesso il bilancio della Q_L è nullo, ma ciò che importa è il maggiore onere che il “palleggiamento” di questa potenza comporta sulle linee di trasporto e nei trasformatori.

I distributori di tensione impongono alle utenze un valor minimo del $\cos\phi$ con cui esse prelevano l'energia, di solito pari a 0,9; l'adeguamento a tale valore viene soddisfatto con l'inserzione, in parallelo al carico, di banchi di condensatori, che assorbono una $Q_C < 0$.

L'inserzione di tali condensatori, come si può vedere dalla figura sottostante, non altera il valore della potenza attiva P , ma ha come unico effetto quello di ridurre il modulo, e lo sfasamento rispetto alla tensione, della corrente in ingresso alle utenze.

E' possibile calcolare il valore della capacità necessaria per rifasare i carichi al $\cos\phi$ richiesto:

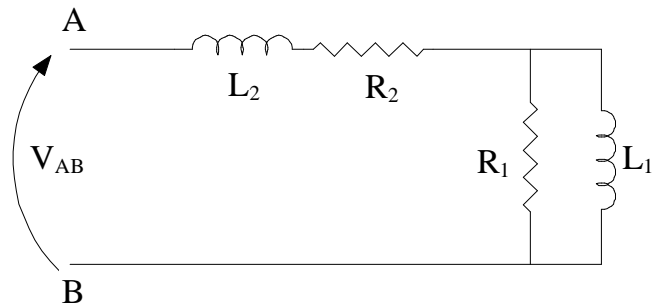
$$Q_C = \frac{V^2}{X_C} = Q - Q' \Rightarrow \omega C V^2 = P \cdot (\operatorname{tg}\phi - \operatorname{tg}\phi')$$



ESERCIZIO 10.1

Calcolare le potenze attiva, reattiva ed apparente del circuito in figura con i seguenti dati:

- $X_{L1} = 10 \Omega$
- $R_1 = 10 \Omega$
- $X_{L2} = 5 \Omega$
- $R_2 = 10 \Omega$
- $V_{AB} = 100 \text{ V}$



$$I = \frac{V_{AB}}{|Z_{EQ}|} = \frac{V_{AB}}{\sqrt{R_{EQ}^2 + X_{EQ}^2}} = \frac{100}{\sqrt{325}} = 5,547 \text{ A}$$

$$P = R_{EQ} \cdot I^2 = 15 \cdot 5,547^2 = 461,54 \text{ W}$$

$$Q = X_{EQ} \cdot I^2 = 10 \cdot 5,547^2 = 307,69 \text{ VAR}$$

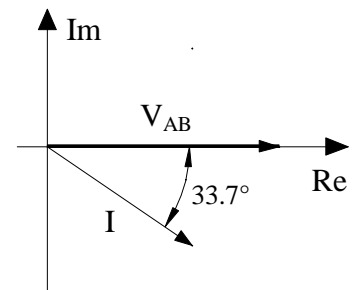
$$A = \sqrt{P^2 + Q^2} = 554,7 \text{ VA}$$

Facciamo una verifica calcolando lo sfasamento tra tensione e corrente che coincide con quello dovuto all'impedenza equivalente:

$$\varphi = \arctg\left(\frac{X_{EQ}}{R_{EQ}}\right) = 33,69^\circ$$

$$P = V \cdot I \cdot \cos(\varphi) = 100 \cdot 5,547 \cdot 0,832 = 461,54 \text{ W}$$

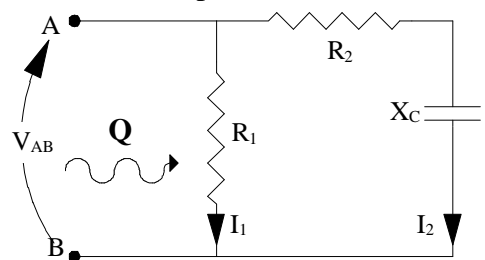
$$Q = V \cdot I \cdot \sin(\varphi) = 100 \cdot 5,547 \cdot 0,5547 = 307,69 \text{ VAR}$$



ESERCIZIO 10.2

Dato il circuito in figura calcolare la tensione ai morsetti A e B (V_{AB}) e la potenza attiva assorbita sapendo che:

- $R_1 = 20 \Omega$
- $R_2 = 3 \Omega$
- $X_C = 4 \Omega$
- $Q = 400 \text{ VAR}$



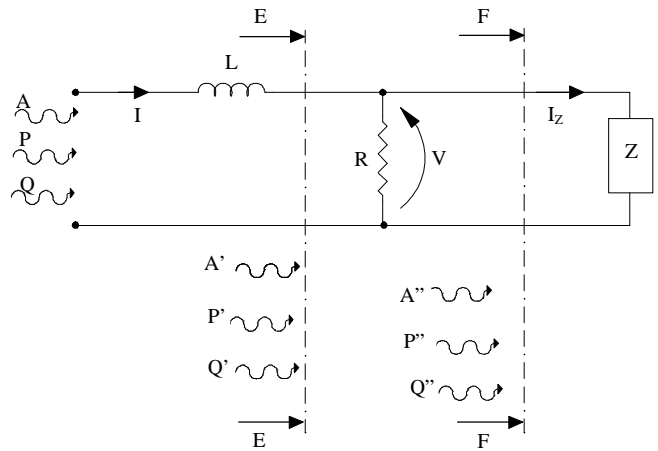
Si noti come l'unico elemento in grado di assorbire o generare potenza reattiva sia il condensatore pertanto sarebbe più giusto affermare che la potenza reattiva sia negativa (secondo la freccia che indica assorbimento) ovvero generata.

$$\left. \begin{aligned} Q = X \cdot I^2 \Rightarrow |I_2| &= \sqrt{\frac{Q}{X_C}} = \sqrt{\frac{400}{4}} = 10 \text{ A} \\ |Z_{EQ}| = |R_2 - jX_C| &= \sqrt{R_2^2 + X_C^2} = 5 \Omega \\ |V_{AB}| = |Z_{EQ}| \cdot |I_2| &= 5 \cdot 10 = 50 \text{ V} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} P_{R1} &= \frac{|V_{AB}|^2}{R_1} = \frac{50^2}{20} = 125 \text{ W} \\ P_{R2} &= R_2 \cdot I_2^2 = 3 \cdot 10^2 = 300 \text{ W} \\ P_{TOT} &= P_{R1} + P_{R2} = 125 + 300 = 425 \text{ W} \end{aligned} \right.$$

ESERCIZIO 10.3

Con riferimento al circuito in figura calcolare il valore dell'impedenza Z conoscendo questi dati:

- $Q = 1000 \text{ VAr}$
- $A = 2000 \text{ VA}$
- $X_L = 20 \Omega$
- $R = 200 \Omega$
- $I = 5 \text{ A}$



Per risolvere questo problema si può procedere così:

- 1) si calcola la potenza P all'origine note A e Q;
- 2) si calcola la potenza reattiva assorbita da L;
- 3) si trovano le potenze alla sezione E-E;
- 4) nota la potenza apparente e la corrente che "entrano" in E-E si calcola la tensione V;
- 5) conoscendo la tensione a cui è sottoposta R si può calcolare la potenza che assorbe;
- 6) per differenza tra quanto entra in E-E e quanto viene assorbito prima di F-F, si trovano le potenze assorbite dal carico incognito;
- 7) conoscendo P_Z e Q_Z calcoliamo A_Z ;
- 8) noto A_Z e V calcoliamo I_Z ;
- 9) note le potenze e la corrente calcoliamo il valore di Z.

Nota 1: si supporrà che il carico possa essere rappresentato da una serie tra una resistenza (R_Z) e una reattanza (X_Z) che potrà essere induttiva ($X_Z > 0$; $X_Z = X_L$) oppure capacitiva ($X_Z < 0$; $X_Z = -X_C$).

Nota 2: attenzione quando si trattano le correnti in modulo: non possono essere sommate o sottratte ecco perché nel punto 8) si è fatto ricorso alle potenze e non all'equilibrio al nodo.

$$1) P = \sqrt{A^2 - Q^2} = 1000\sqrt{3} \text{ W}$$

$$2) Q_L = X_L \cdot I^2 = 20 \cdot 5^2 = 500 \text{ VAr}$$

$$3) \left. \begin{array}{l} P' = P = 1000\sqrt{3} \\ Q' = Q - Q_L = 1000 - 500 = 500 \text{ VAr} \end{array} \right\} \Rightarrow A' = \sqrt{P'^2 + Q'^2} = 1800 \text{ VA}$$

$$4) A' = I \cdot V \Rightarrow V = \frac{A'}{I} = \frac{1800}{5} = 360 \text{ V}$$

$$5) P_R = \frac{V^2}{R} = \frac{360^2}{200} = 648 \text{ W}$$

$$6) P_Z = P' - P_R = 1000\sqrt{3} - 648 = 1084 \text{ W}; \quad Q_Z = Q' = 500 \text{ VAr}$$

$$7) A_Z = \sqrt{P_Z^2 + Q_Z^2} = 1193,8 \text{ VA}$$

$$8) I_Z = \frac{A_Z}{V} = \frac{1193,8}{360} = 3,3 \text{ A}$$

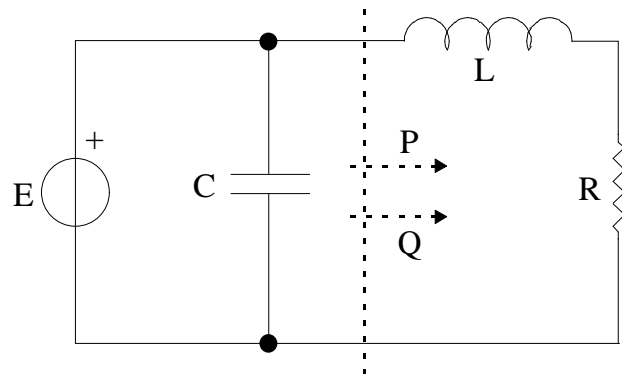
$$9) R_Z = \frac{P_Z}{I_Z^2} = \frac{1084}{3,3^2} = 98,58 \Omega$$

$$X_Z = \frac{Q_Z}{I_Z^2} = \frac{500}{3,3^2} = 45,47 \Omega \Rightarrow X_Z > 0 \Rightarrow X_Z = X_L$$

ESERCIZIO 10.4

Calcolare la capacità del condensatore necessario per rifasare il circuito a $\cos\varphi = 0,9$

- $Q = 75 \text{ VAr}$
- $P = 100 \text{ W}$
- $E = 25 \text{ V}$
- $\omega = 50 \text{ rad/s}$



Soluzione

$$\begin{cases} P' = 100 \text{ W} \\ Q' = 75 + Q_C \end{cases}$$

$$\cos\varphi = 0,9 \Rightarrow \arctg \frac{Q'}{P'} = 25,84^\circ \Rightarrow Q' = 48,43 \text{ VAr} \Rightarrow$$

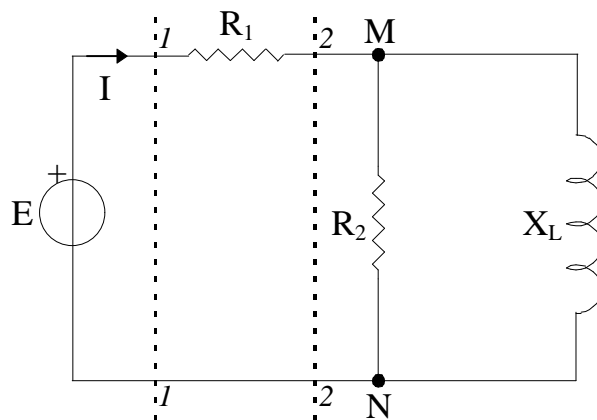
$$Q_C = -26,56 \text{ VAr} \quad (\text{potenza reattiva che il condensatore deve mettere in gioco per "rifasare" a } \cos\varphi = 0,9)$$

$$X_C = \frac{E^2}{Q_C} = -23,52 \Omega \Rightarrow C = \frac{1}{\omega \cdot X_C} = \frac{1}{50 \cdot 23,52} = 850 \mu\text{F}$$

ESERCIZIO 10.5

Determinare i valori di R_2 e X_L sapendo:

$$\begin{cases} |I| = 10 \text{ A} \\ |V_{MN}| = 80 \text{ V} \\ R_1 = 5 \Omega \\ |E| = 120 \text{ V} \end{cases}$$



Soluzione

$$P_{R_1} = R_1 \cdot I^2 = 500 \text{ W}$$

$$\begin{cases} S_1 = E \cdot I = 1200 \text{ VA} = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} \\ S_2 = V_{MN} \cdot I = 800 \text{ VA} = \sqrt{(P_1 - 500)^2 + Q_1^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = 1050 \text{ W} \\ Q_1 = 580,94 \text{ VAr} \end{cases} \Rightarrow \varphi_1 = \arctg \frac{Q_1}{P_1} = 28,95^\circ$$

dove φ_1 è l'angolo di sfasamento tra la tensione E e la corrente I .

La P_2 viene dissipata interamente su R_2 , per cui:

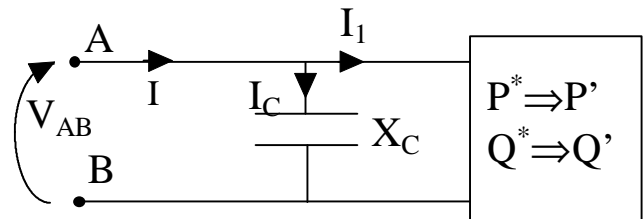
$$\begin{cases} R_2 = \frac{V_{MN}^2}{P_2} = 11,63 \Omega \\ X_L = \frac{V_{MN}^2}{Q_2} = 11 \Omega \end{cases} \quad \boxed{\begin{matrix} R_2 = 11,63 \Omega \\ X_L = 11 \Omega \end{matrix}}$$

ESERCIZIO 10.6

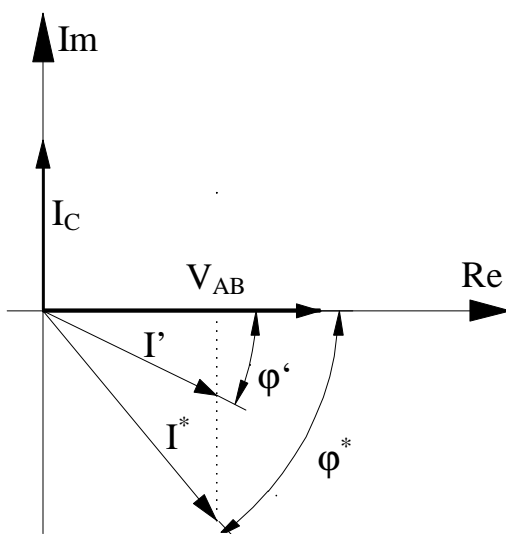
Dato l'impianto esemplificato con lo schema in figura determinare il condensatore da applicare in parallelo al carico affinché risulti $\cos\varphi = 0,9$.

Dati:

- $P' = 10 \text{ kW}$
- $Q' = 10 \text{ kVAr}$
- $V = 350 \text{ V}$



L'angolo di sfasamento φ può essere calcolato mediante la seguente formula: $\text{tg}(\varphi) = \frac{Q}{P}$



Nei problemi di questo tipo si suppone che il carico sia di tipo ohmico-induttivo.

Supponendo che la tensione ai morsetti V_{AB} abbia fase nulla, e ricordando che la corrente in un condensatore è sfasata di 90° in anticipo rispetto alla tensione si può fare lo schema come in figura accanto.

L'inserimento dei condensatori non varia la potenza attiva assorbita dal circuito, per cui conoscendo il nuovo angolo di sfasamento si può calcolare la nuova potenza reattiva che deve essere la somma algebrica di quella assorbita e di quella generata dai condensatori.

Indicando con apice ' le grandezze prima del rifasamento, e con '' quelle dopo il rifasamento:

$$P'' = P'$$

$$\text{tg}(\varphi) = \frac{Q''}{P''} = \frac{Q''}{P'} \Rightarrow Q'' = P' \text{tg}(\varphi) = P' \text{tg}(\cos^{-1}(0,9)) = 4,84 \text{ kVAr}$$

$$Q = Q' - Q_C \Rightarrow |Q_C| = Q' - Q = 10 - 4,84 = 5,16 \text{ kVAr} \Leftrightarrow Q_C = P \cdot [\text{tg}(\varphi') - \text{tg}(\varphi)]$$

$$Q_C = \frac{V^2}{X_C} \Rightarrow X_C = \frac{V^2}{Q_C} = \frac{350^2}{5160} = 27,74 \Omega \Rightarrow C = 134 \mu\text{F}$$

ESERCIZIO 10.7

Sia dato un impianto che assorbe 50 kW di potenza attiva con un $\cos\varphi = 0,4$; alimentato a 380 V da un cavo di lunghezza $d = 200$ m con una sezione $S = 70 \text{ mm}^2$ e con una resistività specifica $\rho = 0,0175 \text{ } \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$.

Calcolare la capacità dei condensatori necessari per rifasare a $\cos\varphi = 0,9$ e calcolare la potenza reattiva assorbita dall'impianto, le perdite e il rendimento della linea prima e dopo il rifasamento.

Lo schema dell'esercizio e quello riportato in figura.

Come prima operazione si calcoli la resistenza effettiva del cavo (notare che la lunghezza del cavo viene moltiplicata per due (andata e ritorno)).

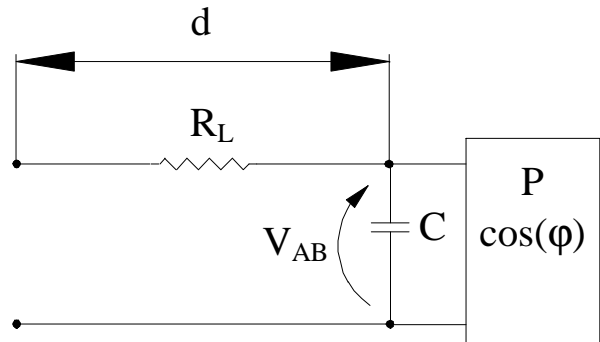
$$R_L = \rho \cdot \frac{2d}{S} = 0,0175 \cdot \frac{2 \cdot 200}{70} = 0,1 \text{ } \Omega$$

Poiché rifasando non varia né la potenza attiva assorbita dall'impianto, né la tensione ai suoi capi:

$$P = I \cdot V_{AB} \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow I = \frac{P}{V_{AB} \cdot \cos(\varphi)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cos(\varphi') = 0,4 \rightarrow I' = 329 \text{ A} \\ \cos(\varphi'') = 0,9 \rightarrow I'' = 146 \text{ A} \end{cases}$$

$$P_{LIN} = R_L \cdot I^2 \Rightarrow \begin{cases} \cos(\varphi') = 0,4 \rightarrow P'_{LINEA} = 10,8 \text{ kW} \\ \cos(\varphi'') = 0,9 \rightarrow P''_{LINEA} = 2,1 \text{ kW} \end{cases}$$



Il rendimento della linea viene definito come il rapporto tra la potenza fornita dalla linea all'impianto (ovvero potenza uscente dalla linea) e la potenza che bisogna fornire a valle della linea stessa che è pari alla somma delle potenze assorbite dall'impianto e dalla linea.

$$\eta_{LINEA} = \frac{P_{OUT}}{P_{IN}} = \frac{P}{P + P_{LINEA}} = \begin{cases} \cos(\varphi') = 0,4 \rightarrow \eta'_{LINEA} = \frac{50000}{50000 + 10800} = 0,82 \\ \cos(\varphi'') = 0,9 \rightarrow \eta''_{LINEA} = \frac{50000}{50000 + 2100} = 0,96 \end{cases}$$

Ora si calcoli la capacità dei condensatori per il rifasamento:

$$Q_C = P \cdot \{ \text{tg}[\arccos(0,9)] - \text{tg}[\arccos(0,4)] \} = 50000 \cdot (0,484 - 2,29) = 90 \text{ kVAr}$$

$$X_C = \frac{V^2}{Q_C} = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow C = |Q_C| \cdot \frac{1}{\omega V^2} = |Q_C| \cdot \frac{1}{2\pi f \cdot V^2} \cong 2 \cdot 10^{-3} \text{ F} = 2 \text{ mF}$$