Schede di Elettrotecnica

Corso di Elettrotecnica 1 - Cod. 9200 N
Diploma Universitario Teledidattico in
Ingegneria Informatica ed Automatica
Polo Tecnologico di Alessandria

A cura di Luca FERRARIS

Scheda N° 8

Circuiti in Corrente Alternata:

- Rappresentazione con vettori, sinusoidi, esponenziali
- Reattanze e impedenze

GRANDEZZE SINUSOIDALI E LORO RAPPRESENTAZIONI.

Una grandezza che varia nel tempo in maniera sinusoidale può essere rappresentata attraverso una funzione trigonometrica tipo:

$$\boxed{G(t) = G \cdot sen(\omega \cdot t + \varphi)}$$

con: G = valore massimo assunto dalla grandezza $G(t)$;
ω = pulsazione della grandezza ($\omega = 2\pi f$);
f = frequenza con cui varia $G(t)$;
φ = fase della grandezza $G(t)$.

Per quanto riguarda i *componenti* delle reti in corrente alternata oltre alle resistenze vi sono anche i condensatori (C) e le induttanze (L).
La capacità dei condensatori si misura in Farad [F], l'induttanza si misura in Henry [H].
Per risolvere gli esercizi si fa riferimento alle impedenze (Z) e reattanze (X), misurate in Ohm [Ω], così definite:

- per le resistenze: $Z_R = R$
- per le induttanze: $X_L = \omega L = 2\pi f L$
- per i condensatori: $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{2\pi f \cdot C}$

Per quanto riguarda la *fase* di questi componenti:

nelle resistenze la tensione è in fase con la corrente $\Rightarrow \vec{Z}_R = R$

nelle induttanze la tensione è in anticipo di fase sulla corrente di 90° $\Rightarrow \vec{Z}_L = j \cdot X_L$

nei condensatori la tensione è in ritardo di fase sulla corrente di 90° $\Rightarrow \vec{Z}_C = -j \cdot X_C$

Lavorare con funzioni trigonometriche (ovvero farne somme e prodotti) non è per nulla agevole e comodo, pertanto per operare sulle grandezze in corrente alternata si farà ricorso a rappresentazioni simboliche mediante *fasori* o mediante *esponenziali*.

I *fasori* sono dei vettori *rotanti* nel piano Complesso con frequenza f (o pulsazione ω), i quali vengono "fotografati" in un dato istante, il che rende possibile identificare le loro posizioni relative, e quindi le differenze di fase o sfasamenti.
Per descrivere i fasori si ricorre ai numeri complessi, portando alle seguenti rappresentazioni:

$$\vec{G} = Re(\vec{G}) + j\ Im(\vec{G})$$

$$\vec{G} = G_{eff} \cdot e^{j \cdot \varphi} = \left|\vec{G}\right| \cos(\varphi) + j \left|\vec{G}\right| sen(\varphi)$$

Per quanto riguarda le grandezze di interesse di questo corso non si fa riferimento al valore massimo (quello che compare nelle espressioni trigonometriche) ma al *valore efficace*:

$$X_{eff} = \frac{X_{Max}}{\sqrt{2}}$$

Risulta utile ricordare come calcolare *modulo e fase*:

$$\begin{cases} \left|\vec{G}\right| = \sqrt{Re^2 + Im^2} \\ \varphi = tg^{-1}\left(\dfrac{Im}{Re}\right) \end{cases}$$

L'utilità di questo tipo di rappresentazione risiede nel fatto che l'operazione di derivazione equivale alla moltiplicazione per *jw*, per cui le equazioni differenziali si trasformano in equazioni algebriche risolvibili con questo passaggio ai fasori, che sono poi riconducibili alle grandezze nel tempo.

Le grandezze quali tensione e corrente si esprimono come visto nella forma:

$$\vec{V} = V_{eff} \cdot e^{j \cdot (\omega t + \varphi)}$$

$$\vec{I} = I_{eff} \cdot e^{j \cdot (\omega t + \varphi - \alpha)}$$

Si noti come entrambi i fasori contengono il termine $e^{j\omega t}$ che dunque risulta inessenziale e può essere eliminato in tutte le grandezze (esso contiene solo l'informazione sulla pulsazione, ovvero sulla velocità di rotazione dei vettori nello spazio, che però è la stessa per tutti); in tal modo, come termine identificativo, rimane solo quello relativo alla fase, e quindi agli sfasamenti tra le varie grandezze.

E' normale in campo alternato fissare *arbitrariamente* un riferimento di fase, nel senso di stabilire quale sia la grandezza avente fase nulla, e considerare tutte le altre grandezze secondo questo riferimento.

Moltiplicare un fasore per *jw* equivale a ruotarlo di 90° in senso anti-orario, avendo assunto tale verso come quello positivo di rotazione.

In Corrente Alternata continuano a valere *tutte* le Leggi ed i Teoremi relativi alla risoluzione dei circuiti visti in Corrente Continua, dove però al posto delle sole resistenze si dovranno considerare le reattanze ed impedenze, quindi numeri complessi.

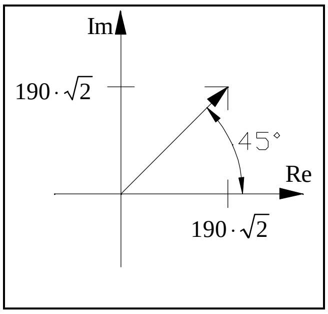
Impedenze in serie:
l'impedenza serie di più impedenze si trova come somma delle stesse.

Impedenze in parallelo:
l'inverso dell'impedenza parallelo di più impedenze si trova come somma dei reciproci delle stesse.

ESERCIZIO 8.1

Determinare e disegnare il fasore che rappresenta la seguente tensione alternata:

$$V(t) = 537\,\text{sen}(\omega t + 45°)\ \text{V}.$$



Per risolvere l'esercizio si procede calcolando il valore efficace della grandezza, quindi la parte reale e quella immaginaria e poi, noti modulo e fase si rappresenta come in figura.

$$V_{EFF} = \frac{537}{\sqrt{2}} = 380\ \text{V} \quad \begin{cases} \text{Re}(V) = 380 \cdot \cos(45°) = 268{,}7 = 190\sqrt{2}\ \text{V} \\ \text{Im}(V) = 380 \cdot \text{sen}(45°) = 268{,}7 = 190\sqrt{2}\ \text{V} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{V} = 190\sqrt{2} + j \cdot 190\sqrt{2} = 190\sqrt{2} \cdot (1 + j)\ \text{V} \\ \vec{V} = 380 e^{j45°}\ \text{V} \end{cases}$$

ESERCIZIO 8.2

Rappresentare in maniera esponenziale, grafica e trigonometrica il vettore: $\vec{V} = 105 + j \cdot 300\ \text{V}$.

$$\left. \begin{array}{l} \left|\vec{V}\right| = \sqrt{105^2 + 300^2} = 317{,}84\ \text{V} \\ \varphi = \text{arctg}\left(\dfrac{300}{105}\right) = 70{,}7° \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{V} = 317{,}84 e^{j \cdot 70{,}7°}\ \text{V} \\ V(t) = 317{,}84 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(\omega t + 70{,}7)\ \text{V} \end{cases}$$

ESERCIZIO 8.3

Sommare le seguenti funzioni sinusoidali: $\begin{cases} a(t) = 282{,}8 \cdot \text{sen}(\omega t) \\ b(t) = 141{,}42 \cdot \text{sen}(\omega t + \dfrac{\pi}{4}) \end{cases}$

Passaggio ai fasori: $\begin{cases} \vec{A} = \dfrac{282{,}8}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\omega t} = 200 \cdot e^{j\omega t} \\ \vec{B} = \dfrac{141{,}42}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)} = 100 \cdot e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)} \end{cases}$

Somma dei fasori:

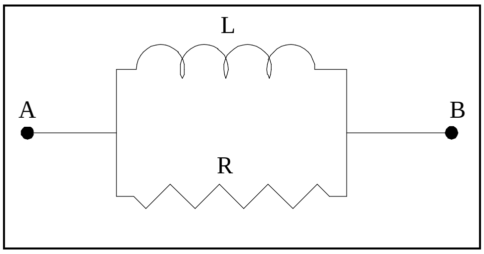
$$\vec{A} + \vec{B} = 200 \cdot e^{j\omega t} + 100 \cdot e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)} = \left(200 + 100 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}\right) \cdot e^{j\omega t}$$

$$= (200 + 70{,}7 + j70{,}7) \cdot e^{j\omega t} = \left(280 \cdot e^{j\ \text{arctg}(0{,}261)}\right) \cdot e^{j\omega t} = 280 \cdot e^{j\ 14{,}64} \cdot e^{j\omega t}$$

Ritorno alle sinusoidi: $\boxed{a(t) + b(t) = 280 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen}(\omega t + 14{,}64)}$

ESERCIZIO 8.4

Calcolare l'impedenza complessiva tra i punti A e B della figura 4.3 nei casi in cui la frequenza (f) valga 50 Hz e 100 Hz; i dati sono i seguenti:



- R = 30 Ω
- L = 45 mH

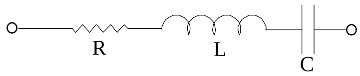
$$\vec{X}_L = j\cdot\omega\cdot L = j\cdot 2\cdot\pi\cdot f\cdot L \;\Rightarrow\; \begin{cases} \vec{X}_{L50} = j\cdot 14{,}13\ \Omega \\ \vec{X}_{L100} = j\cdot 28{,}27\ \Omega \end{cases}$$

$$\vec{Z}_{50} = \left(\frac{1}{\vec{R}} + \frac{1}{\vec{X}_{L50}}\right)^{-1} = \frac{j\cdot R\cdot X_{L50}}{R + j\cdot X_{L50}} = \frac{j\cdot R\cdot X_{L50}\left(R - j\cdot X_{L50}\right)}{\left(R + j\cdot X_{L50}\right)\left(R - j\cdot X_{L50}\right)} = 5{,}45 + j\cdot 11{,}57\ [\Omega]$$

$$\vec{Z}_{100} = \left(\frac{1}{\vec{R}} + \frac{1}{\vec{X}_{L100}}\right)^{-1} = 14{,}11 + j\cdot 14{,}97\ [\Omega]$$

ESERCIZIO 8.5

Dato il circuito in figura calcolare l'impedenza equivalente (Z_{eq}).



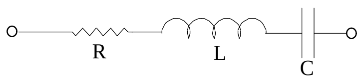
- X_C = 20 Ω
- X_L = 20 Ω
- R = 20 Ω

$$\boxed{\vec{Z}_{EQ} = R + j\left(X_L - X_C\right) = 20\ \Omega}$$

(Risonanza serie: il circuito si comporta come un carico solo resistivo)

ESERCIZIO 8.6

Dato il circuito in figura calcolare l'impedenza equivalente (Z_{eq}).

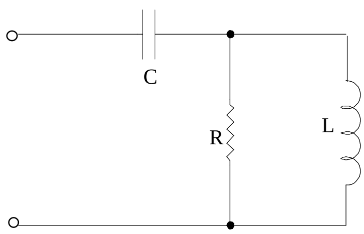


- X_C = 20 Ω
- X_L = 10 Ω
- R = 20 Ω

$$\vec{Z}_{EQ} = R + j\left(X_L - X_C\right) = \left(20 - j10\right)\ \Omega$$

ESERCIZIO 8.7

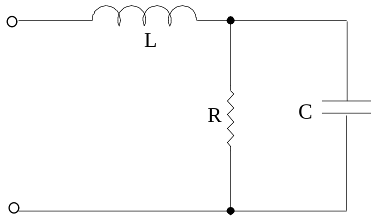
Dato il circuito in figura calcolare l'impedenza equivalente (Z_{eq}).



- X_C = 20 Ω
- X_L = 20 Ω
- R = 20 Ω

$$\vec{Z}_{EQ} = Z_C + \left(Z_L // Z_R\right) = -j20 + \frac{20\cdot j20}{20 + j20} = -j20 + 10(1 + j) = 10(1 - j)\ \Omega$$

ESERCIZIO 8.8

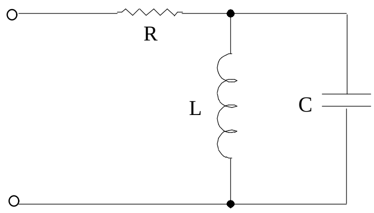


Dato il circuito in figura calcolare l'impedenza equivalente (Z_{eq}).

- $X_C = 20\ \Omega$
- $X_L = 20\ \Omega$
- $R\ \ = 20\ \Omega$

$$\boxed{\vec{Z}_{EQ} = Z_L + (Z_C\ //\ Z_R) = 10(1+j)\ \Omega}$$

ESERCIZIO 8.9

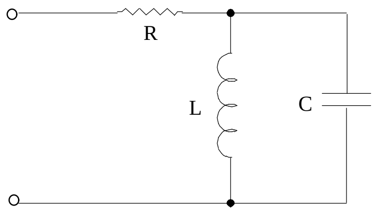


Dato il circuito in figura calcolare l'impedenza equivalente (Z_{eq}).

- $X_C = 10\ \Omega$
- $X_L = 20\ \Omega$
- $R\ \ = 20\ \Omega$

$$\boxed{\vec{Z}_{EQ} = R + (Z_C\ //\ Z_L) = 20(1-j)\ \Omega}$$

ESERCIZIO 8.10



Dato il circuito in figura calcolare l'impedenza equivalente (Z_{eq}).

- $X_C = 20\ \Omega$
- $X_L = 10\ \Omega$
- $R\ \ = 20\ \Omega$

$$\boxed{\vec{Z}_{EQ} = R + (Z_C\ //\ Z_L) = 20(1+j)\ \Omega}$$

ESERCIZIO 8.11

Dato il circuito in figura esprimere l'impedenza equivalente

$$Z_{RC} = R - j\frac{1}{\omega C}$$

$$Z_{tot} = \frac{\left(R - j\frac{1}{\omega C}\right)\cdot j\omega L}{\left(R - j\frac{1}{\omega C}\right) + j\omega L}$$