Schede di Elettrotecnica

Corso di Elettrotecnica 1 - Cod. 9200 N
Diploma Universitario Teledidattico in
Ingegneria Informatica ed Automatica
Polo Tecnologico di Alessandria

A cura di Luca FERRARIS

Scheda N° 7

Reti in Corrente Continua:

- Transitori del 1° ordine

RETI IN REGIME VARIABILE

Relazioni per i bipoli:

$$R\begin{cases} v_R(t) = R \cdot i_R(t) \\ i_R(t) = \dfrac{v_R(t)}{R} \end{cases} \qquad C\begin{cases} v_C(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} i_C(t)dt + V_0 \\ i_C(t) = C \cdot \dfrac{dv_C(t)}{dt} \end{cases} \qquad L\begin{cases} i_L(t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} v_L(t)dt + I_0 \\ v_L(t) = L \cdot \dfrac{di_L(t)}{dt} \end{cases}$$

Nell'ipotesi che resistenze, condensatori ed induttanze siano costanti, le equazioni che risolvono la rete sono differenziali lineari a coefficienti costanti.

TRANSITORI AD UNA SOLA COSTANTE DI TEMPO E GENERATORI IN CONTINUA

Il transitorio è causato dall'aprirsi o chiudersi di interruttori; una qualsiasi tensione o corrente nel circuito sarà data da:

$$\begin{cases} v(t) = \left(V_{0^+} - V_\infty\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + V_\infty \\ i(t) = \left(I_{0^+} - I_\infty\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + I_\infty \end{cases}$$

dove:

- V_{0+} e I_{0+} sono la tensione e la corrente nell'istante immediatamente successivo all'apertura o chiusura dell'interruttore. I condensatori non possono avere discontinuità di tensione (che richiederebbe una corrente infinita) e gli induttori non possono avere una discontinuità di corrente (che richiederebbe una tensione infinita); per questo motivo si possono valutare le condizioni iniziali sostituendo:
  - ai *condensatori* dei generatori di tensione costante, pari alla tensione ai loro capi prima della manovra dell'interruttore;
  - agli *induttori* dei generatori di corrente costante, pari alla corrente che li attraversa prima della manovra dell'interruttore.

- V_∞ e I_∞ sono la tensione e la corrente finali nel lato considerato; in pratica è la soluzione in regime continuo, che si ottiene sostituendo:
  - ai *condensatori* dei circuiti aperti
  - agli *induttori* dei corto circuiti

- τ è la costante di tempo del circuito, che a seconda del tipo di bipolo conservativo presente nel circuito vale:

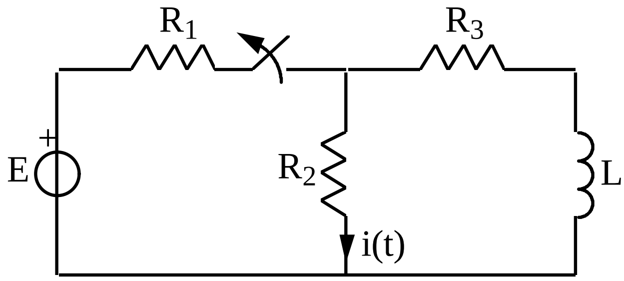
  $$\begin{cases} \text{Condensatore} \quad \tau = R_{eq} \cdot C \\ \text{Induttore} \qquad \tau = \dfrac{L}{R_{eq}} \end{cases}$$

  dove R_{eq} è la resistenza equivalente vista ai morsetti del condensatore o dell'induttore (si calcola in modo analogo a quella del generatore equivalente di Thevenin).

ESERCIZIO 7.1

Nel circuito in corrente continua rappresentato in figura l'interruttore viene aperto all'istante t = 0. Determinare l'espressione analitica dell'andamento della corrente i(t) a partire dall'istante t = 0.

Dati	
R_1 = 10	Ω
R_2 = 10	Ω
R_3 = 10	Ω
L = 1	H
E = 100	V



Soluzione

$$i(t) = \left(i_{0^+} - i_\infty\right)\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + i_\infty \qquad \text{(soluzione generale)}$$

$$R_{eq} = R_2 + R_3 = 20\ \Omega \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{1}{20}\ \text{s}$$

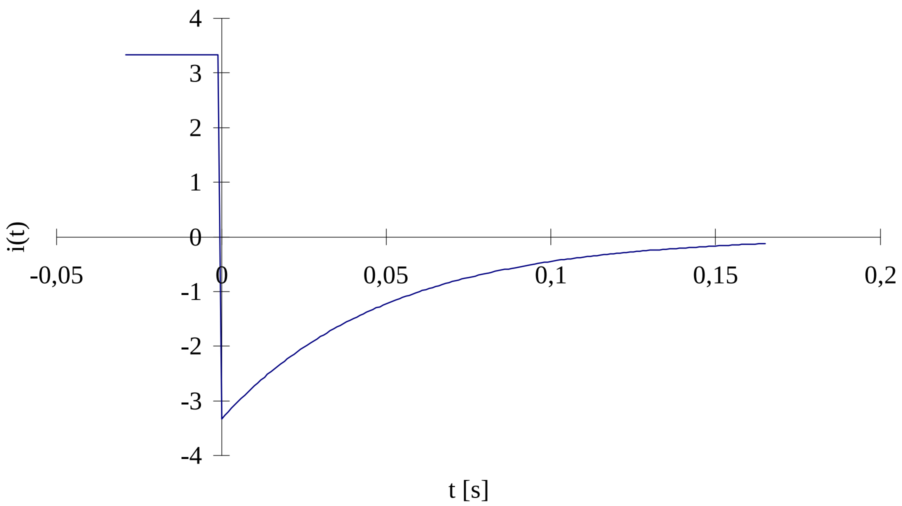
i_{0+} = ? Dopo l'apertura dell'interruttore, la corrente che fluiva nel ramo con L non può far altro che richiudersi nel ramo con R_2, per cui $i_{0+} = - i_L(0^+)$ (= $i_L(0^-)$)

$$-i_{0^+} = i_L\left(0^+\right) = i_L\left(0^-\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{100}{10+\frac{10\cdot 10}{10+10}} = 3{,}33\ \text{A} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{0^+} = -3{,}33\ \text{A}}$$

$$\boxed{i_\infty = \lim_{t\to\infty} i(t) = 0\ \text{A}}$$

per cui si può scrivere l'espressione della corrente nel ramo con R_2:

$$\boxed{i(t) = -3{,}33\cdot e^{-20\cdot t}}$$



Risultati

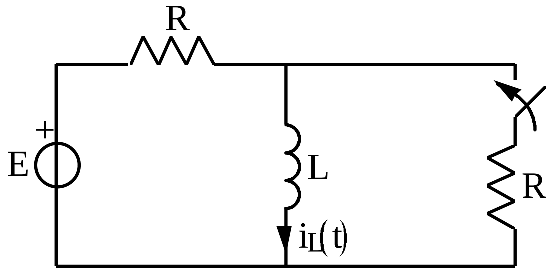
I_{0-} = 3,333333
I_{0+} = -3,33333
I_∞ = 0
τ = 0,05

ESERCIZIO 7.2

Nel circuito in corrente continua rappresentato in figura l'interruttore viene chiuso all'istante t = 0. Determinare:

a) l'energia immagazzinata nel circuito prima della manovra;
b) l'energia immagazzinata nel circuito a transitorio estinto;
c) l'espressione analitica dell'andamento della corrente i(t) a partire dall'istante t = 0.

E = 1200 V
R = 250 Ω
L = 40 mH



Soluzione

a) l'energia immagazzinata nel circuito prima della manovra è tutta contenuta nell'induttanza:
$i_L(0^-)$: la L a regime equivale ad un corto circuito, per cui la corrente che la attraversa vale:

$$i_L\left(0^-\right) = \frac{E}{R} = 4{,}8\ \text{A} \quad \Rightarrow \quad W_L\left(0^-\right) = 0{,}4608\ \text{J}$$

b) l'energia immagazzinata nel circuito a transitorio estinto è ancora tutta contenuta nell'induttanza:
$i_L(\infty)$: il circuito è lo stesso di prima:

$$i_L(\infty) = \frac{E}{R} = 4{,}8\ \text{A} \quad \Rightarrow \quad W_L(\infty) = 0{,}4608\ \text{J}$$

c) l'espressione analitica dell'andamento della corrente $i_L(t)$ a partire dall'istante t = 0 è:

$$i_L(t) = \left(I_{0^+} - I_\infty\right)\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + I_\infty \quad \text{dove:}$$

$$i_L\left(0^+\right) = 4{,}8\ \text{A}$$

$$i_L(\infty) = 4{,}8\ \text{A}$$

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} \quad \text{con } R_{eq} = R\,//\,R = 125\ \Omega \quad \Rightarrow \tau = 3{,}2\cdot 10^{-4}\ \text{s}$$

quindi: $i_L(t) = 4{,}8$ A

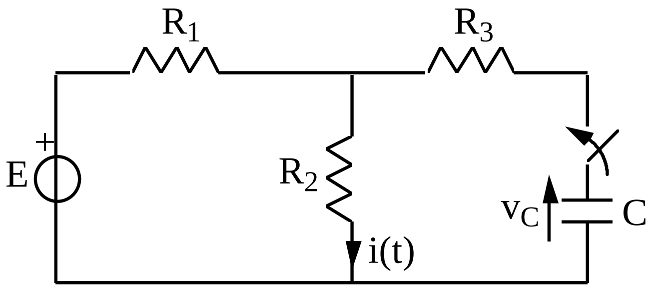
in pratica la manovra dell'interruttore non produce alcuna variazione nella corrente i_L.

ESERCIZIO 7.3

Nel circuito in corrente continua rappresentato in figura l'interruttore viene chiuso all'istante t = 0.
Determinare:

a) l'energia immagazzinata nel circuito prima della manovra;
b) l'energia immagazzinata nel circuito a transitorio estinto;
c) l'espressione analitica dell'andamento della corrente i(t) a partire dall'istante t = 0.

$E = 1200$ V
$R_1 = R_2 = R_3 = 250\ \Omega$
$C = 4$ nF
$v_C(0) = 1000$ V



Soluzione

a) energia immagazzinata nel circuito prima della manovra:

$$W' = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} 4 \cdot 10^{-9} \cdot 1000^2 = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

b) a transitorio estinto il C equivale ad un circuito aperto, per cui nel ramo con R_3 e C non scorre corrente $\Rightarrow V_C = V_{R2}$

$$W' = \frac{1}{2} C V_C^2 = \frac{1}{2} 4 \cdot 10^{-9} \cdot 600^2 = 0{,}72 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

c) l'espressione analitica dell'andamento della corrente i(t) a partire dall'istante t = 0 è:

$$i_L(t) = \left(I_{0^+} - I_\infty\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + I_\infty \quad \text{dove:}$$

I_∞: a regime il C è un circuito aperto $\Rightarrow I_\infty = \dfrac{E}{R_1 + R_2} = 2{,}4$ A

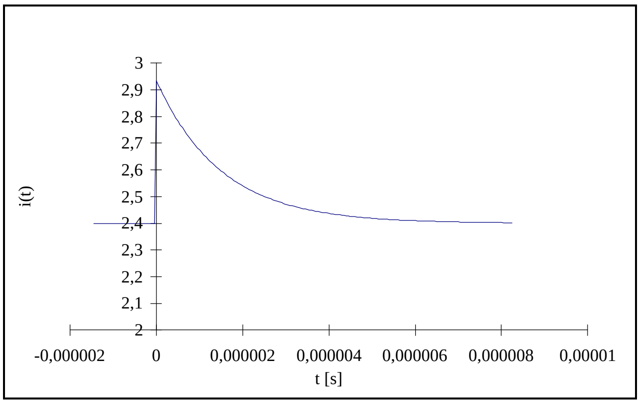
I_{0+}: all'istante 0^+ dopo la chiusura il condensatore è carico a 1000 V, per cui applicando Millman:

$$V_{AB} = \frac{\frac{1200}{250} + \frac{1000}{250}}{\frac{1}{250} + \frac{1}{250} + \frac{1}{250}} = 733{,}33\ \text{V} \qquad \Rightarrow \qquad I_{0+} = \frac{V_{AB}}{R_2} = 2{,}93\ \text{A}$$

$$\tau = R_{eq} \cdot C \qquad \text{con } R_{eq} = \frac{R}{2} + R = 375\ \Omega \qquad \Rightarrow \qquad \tau = 375 \cdot 4 \cdot 10^{-9} = 1{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{s}$$

$$\boxed{i(t) = (2{,}93 - 2{,}4) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + 2{,}4}$$

Risultati	
I_{0-}	2,4
I_{0+}	2,933333
I_{oo}	2,4
τ	1,5E-06

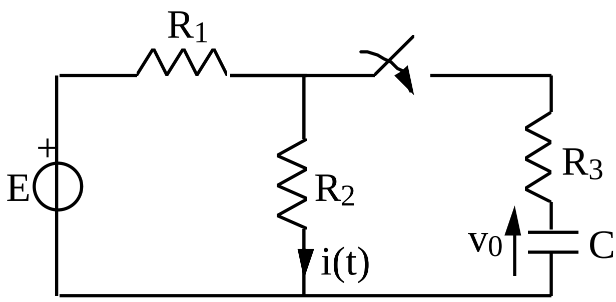


ESERCIZIO 7.4

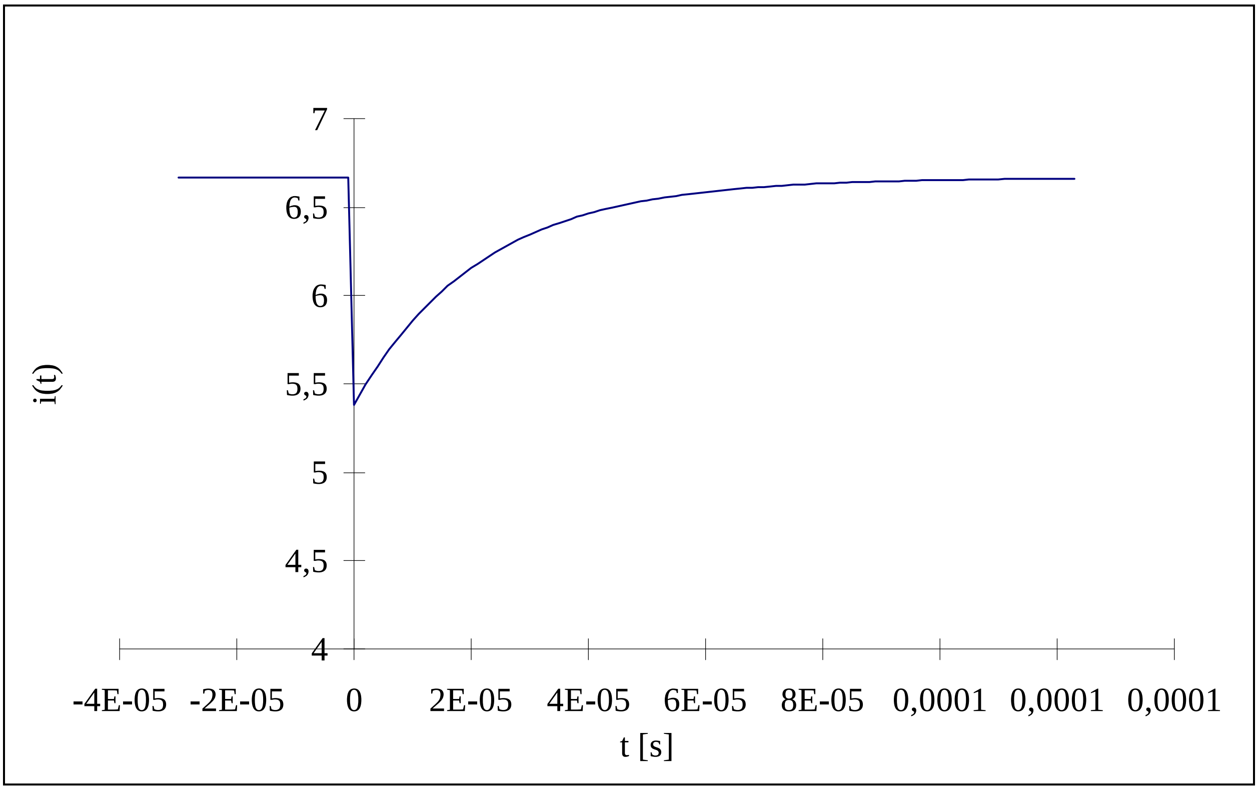
Dato il circuito rappresentato nella figura, determinare l'andamento della corrente i(t) al chiudersi dell'interruttore.

Dati

R_1	10 Ω
R_2	20 Ω
R_3	15 Ω
C	0,000001 F
E	200 V
$V_{C\,0}$	50 V



Soluzione



Risultati

$I_{0-} = 6{,}666667$

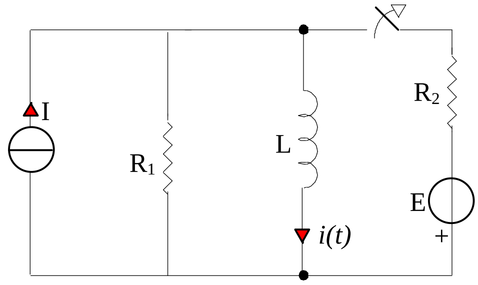
$I_{0+} = 5{,}384615$

$I_{oo} = 6{,}666667$

$\tau = 2{,}17E\text{-}05$

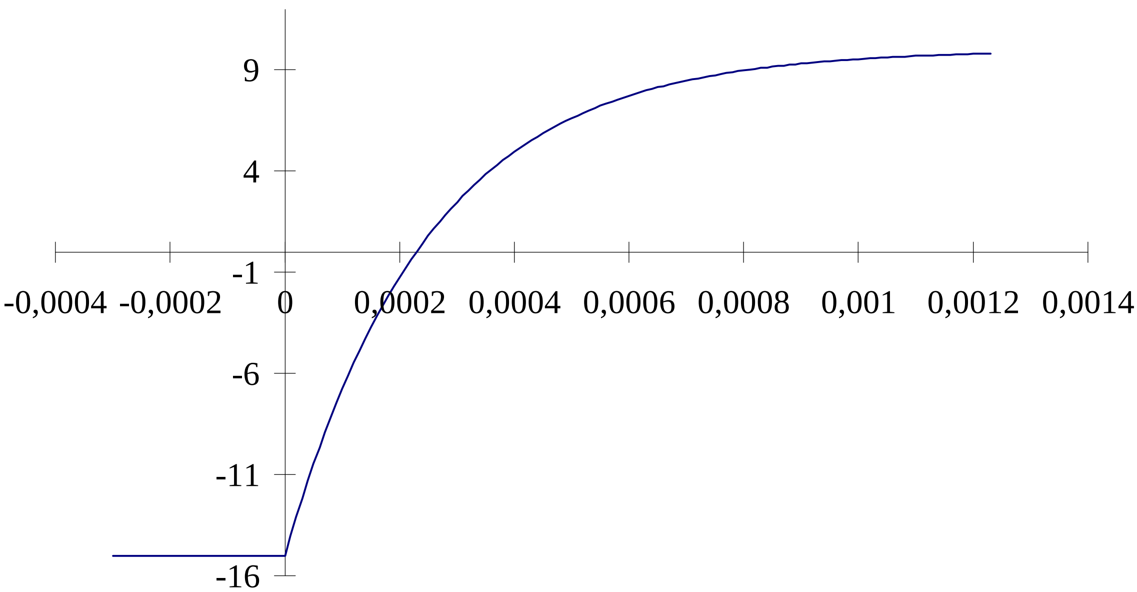
ESERCIZIO 7.5

Dato il circuito rappresentato nella figura, determinare l'andamento della corrente i(t) dopo l'apertura dell'interruttore.



Dati	
R_1	20 Ω
R_2	10 Ω
L	5 mH
E	250 V
I	10 A

Soluzione



Risultati
$I_{0+} = -15$
$I_{oo} = 10$
$\tau = 0{,}00025$