

Schede di Elettrotecnica

*Corso di Elettrotecnica 1 - Cod. 9200 N
Diploma Universitario Teledidattico in
Ingegneria Informatica ed Automatica
Polo Tecnologico di Alessandria*

A cura di Luca FERRARIS

Scheda N° 6

Doppi Bipoli in Corrente Continua:

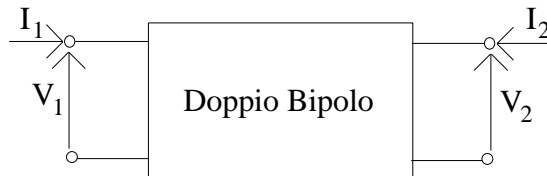
- Matrice R delle resistenze
- Matrice G delle conduttanze

DOPPI BIPOLI

Un doppio bipolo è un elemento di circuito a quattro morsetti.

La corrente I_1 entrante nel morsetto superiore della porta 1 deve essere uguale alla corrente uscente dal morsetto inferiore della stessa porta.

Si assumono le convenzioni di segno degli utilizzatori, come indicato nella figura sottostante.



Il sistema di equazioni che regge il funzionamento di un doppio bipolo è il seguente:

$$\begin{cases} V_1 = R_{11} \cdot I_1 + R_{12} \cdot I_2 \\ V_2 = R_{21} \cdot I_1 + R_{22} \cdot I_2 \end{cases}$$

da cui si può ricavare la matrice R delle resistenze: $\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$ (equivalente di Thevenin);

per ricavare i vari parametri R_{ij} si deve immaginare di applicare un generatore di corrente entrante in una coppia di morsetti e di misurare la tensione alla coppia di morsetti opportuna quando gli altri siano supposti aperti: $R_{ij} = \left(\frac{V_i}{I_j} \right)_{I_i=0}$

Il sistema di equazioni che regge il funzionamento di un doppio bipolo può anche essere:

$$\begin{cases} I_1 = G_{11} \cdot V_1 + G_{12} \cdot V_2 \\ I_2 = G_{21} \cdot V_1 + G_{22} \cdot V_2 \end{cases}$$

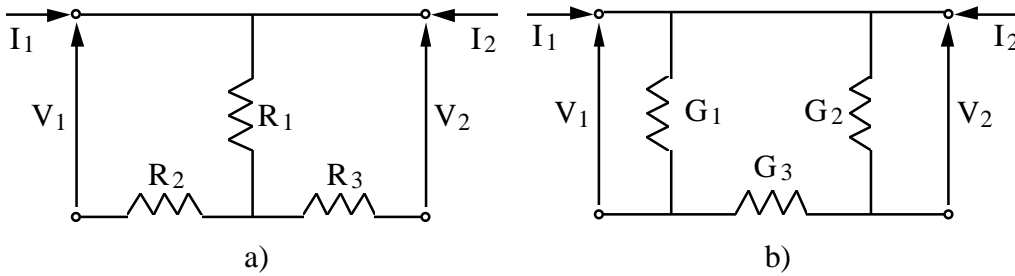
da cui si può ricavare la matrice G delle conduttanze: $\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$ (equivalente di Norton);

per ricavare i vari parametri G_{ij} si deve immaginare di applicare un generatore di tensione ad una coppia di morsetti e di misurare la corrente entrante nella coppia di morsetti opportuna quando gli altri siano supposti in corto circuito: $G_{ij} = \left(\frac{I_i}{V_j} \right)_{V_i=0}$

Le stesse considerazioni che si svolgono nell'ambito della corrente continua continuano a valere in corrente alternata, dove al posto delle resistenze R si devono considerare le impedenze Z , ed al posto delle conduttanze G si devono considerare le ammettenze Y . Le complicazioni sono insite nel fatto che ci si trova a "maneggiare" dei numeri complessi.

ESERCIZIO 6.1

Determinare la matrice R per il doppio bipolo di Fig. a) e la matrice G per il doppio bipolo di Fig. b).



Parte a):

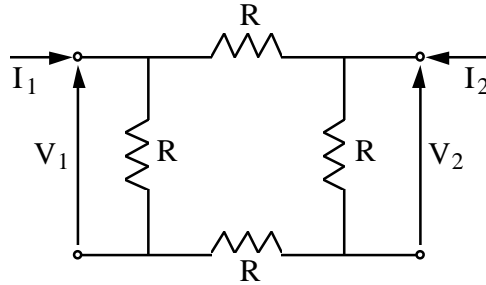
$$\left. \begin{aligned}
 R_{11} &= \left(\frac{V_1}{I_1} \right)_{I_2=0} = R_1 + R_2 \\
 R_{12} &= \left(\frac{V_1}{I_2} \right)_{I_1=0} = R_1 \\
 R_{21} &= \left(\frac{V_2}{I_1} \right)_{I_2=0} = R_1 \\
 R_{22} &= \left(\frac{V_2}{I_2} \right)_{I_1=0} = R_1 + R_3
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Matrice R} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & R_1 \\ R_1 & R_1 + R_3 \end{bmatrix}$$

Parte b):

$$\left. \begin{aligned}
 G_{11} &= \left(\frac{I_1}{V_1} \right)_{V_2=0} = G_1 + G_3 \\
 G_{12} &= \left(\frac{I_1}{V_2} \right)_{V_1=0} = -G_3 \\
 G_{21} &= \left(\frac{I_2}{V_1} \right)_{V_2=0} = -G_3 \\
 G_{22} &= \left(\frac{V_2}{I_2} \right)_{I_1=0} = G_2 + G_3
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Matrice G} = \begin{bmatrix} G_1 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 6.2

Determinare la matrice R delle resistenze del doppio bipolo rappresentato in figura con $R = 10 \Omega$

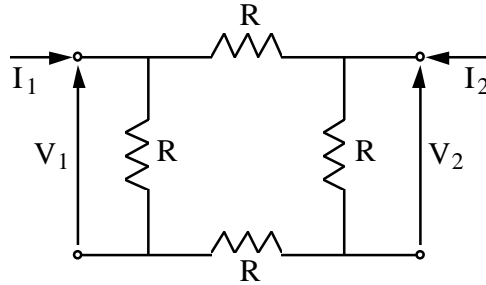


Soluzione

$$\left. \begin{aligned}
 R_{11} &= \left(\frac{V_1}{I_1} \right)_{I_2=0} = \frac{3}{4} \cdot R = 7,5 \Omega \\
 R_{12} &= \left(\frac{V_1}{I_2} \right)_{I_1=0} = \frac{1}{4} \cdot R = 2,5 \Omega \\
 R_{21} &= \left(\frac{V_2}{I_1} \right)_{I_2=0} = \frac{1}{4} \cdot R = 2,5 \Omega \\
 R_{22} &= \left(\frac{V_2}{I_2} \right)_{I_1=0} = \frac{3}{4} \cdot R = 7,5 \Omega
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Matrice R} = \begin{bmatrix} 7,5 \Omega & 2,5 \Omega \\ 2,5 \Omega & 7,5 \Omega \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 6.3

Determinare la matrice G delle conduttanze del doppio bipolo rappresentato in figura con $R = 10 \Omega$

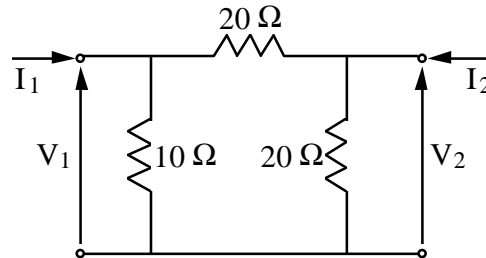


Soluzione

$$\left. \begin{aligned}
 G_{11} &= \left(\frac{I_1}{V_1} \right)_{V_2=0} = 0,15 \text{ S} \\
 G_{12} &= \left(\frac{I_1}{V_2} \right)_{V_1=0} = -0,05 \text{ S} \\
 G_{21} &= \left(\frac{I_2}{V_1} \right)_{V_2=0} = -0,05 \text{ S} \\
 G_{22} &= \left(\frac{V_2}{I_2} \right)_{I_1=0} = 0,15 \text{ S}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Matrice G} = \begin{bmatrix} 0,15 \text{ S} & -0,05 \text{ S} \\ -0,05 \text{ S} & 0,15 \text{ S} \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 6.4

Determinare la matrice R delle resistenze del doppio bipolo rappresentato in figura

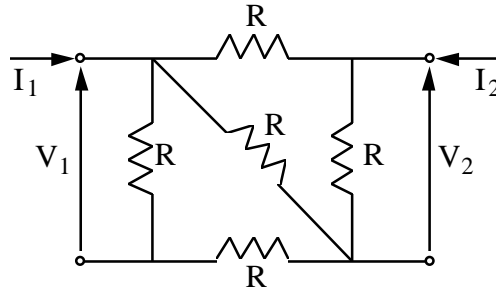


Soluzione

$$\left. \begin{aligned}
 R_{11} &= \left(\frac{V_1}{I_1} \right)_{I_2=0} = 10 \cdot \frac{40}{50} \cdot I_1 = 8 \, \Omega \\
 R_{12} &= \left(\frac{V_1}{I_2} \right)_{I_1=0} = 10 \cdot \frac{20}{50} \cdot I_1 = 4 \, \Omega \\
 R_{21} &= \left(\frac{V_2}{I_1} \right)_{I_2=0} = 10 \cdot \frac{20}{50} \cdot I_1 = 4 \, \Omega \\
 R_{22} &= \left(\frac{V_2}{I_2} \right)_{I_1=0} = 20 \cdot \frac{30}{50} \cdot I_2 = 12 \, \Omega
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Matrice R} = \begin{bmatrix} 8 \, \Omega & 4 \, \Omega \\ 4 \, \Omega & 12 \, \Omega \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 6.5

Determinare la matrice delle resistenze del doppio bipolo rappresentato in figura con $R = 30 \Omega$

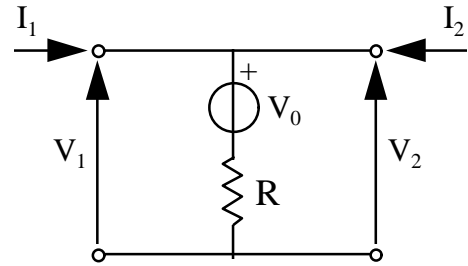


Soluzione

$$\left. \begin{aligned}
 R_{11} &= \left(\frac{V_1}{I_1} \right)_{I_2=0} = \frac{5}{8} \cdot R = 18,75 \Omega \\
 R_{12} &= \left(\frac{V_1}{I_2} \right)_{I_1=0} = \frac{1}{8} \cdot R = 3,75 \Omega \\
 R_{21} &= \left(\frac{V_2}{I_1} \right)_{I_2=0} = \frac{1}{8} \cdot R = 3,75 \Omega \\
 R_{22} &= \left(\frac{V_2}{I_2} \right)_{I_1=0} = \frac{5}{8} \cdot R = 18,75 \Omega
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Matrice } R = \begin{bmatrix} 18,75 \Omega & 3,75 \Omega \\ 3,75 \Omega & 18,75 \Omega \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 6.6

Scrivere la relazione matriciale del doppio bipolo rappresentato in figura.



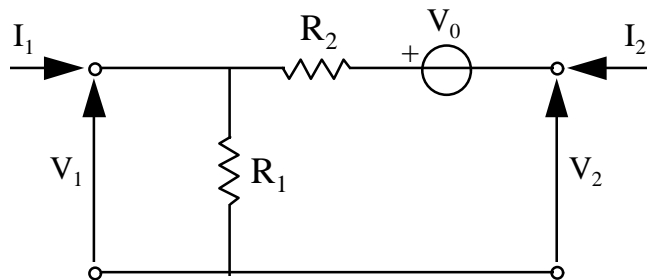
Soluzione

Scrivendo le equazioni alle maglie di destra e sinistra si ottiene:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + V_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 6.7

Scrivere la relazione matriciale del doppio bipolo rappresentato in figura.



Soluzione

Scrivendo le equazioni alle maglie di destra e sinistra si ottiene:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_1 & R_1 + R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + V_0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$