Integrazione numerica

Gabriella Puppo

Integrazione numerica

- Formula dei trapezi
- Formula composta di Simpson
- Funzioni di quadratura di Matlab
- Esempi

Formula dei trapezi

Per costruire una function che applichi il metodo dei trapezi, devo

- La function deve avere in input: il nome della funzione integranda, l’intervallo [a,b] di integrazione, il numero di intervalli in cui suddividere [a,b]
- La function deve dare in output il risultato del calcolo dell’integrale
- All’interno, ci deve essere un ciclo, nel quale si applica la formula composita dei trapezi

```
function s=trapezi(fun,a,b,n)
%
%TRAPEZI Calcola integrali usando il metodo dei trapezi
%       TRAPEZI(FUN,A,B,N): Calcola l'integrale di FUN fra A e B
%       usando la formula dei trapezi composita e dividendo
%       [A,B] in N intervalli uguali
%
h=(b-a)/n;
x=a:h:b;
f=feval(fun,x);
s=f(1)/2;
for i=2:n
   s=s+f(i);
end
s=s+f(n+1)/2;
s=s*h;
```

Esempio

Calcolo l'integrale fra 0 e pi di f(x) = sin(x)

```
>> f=inline('sin(x)');
>> trapezi(f,0,pi,10)
ans =
   1.9835
```

Se uso più punti, ottengo un'approssimazione migliore:

```
>> trapezi(f,0,pi,20)
ans =
   1.9959
>> trapezi(f,0,pi,40)
ans =
   1.9990
```

Formula composta di Simpson

Per costruire una function che applichi il metodo di Simpson, devo

- La function deve avere in input: il nome della funzione integranda, l'intervallo [a,b] di integrazione, il numero di intervalli in cui suddividere [a,b]
- La function deve dare in output il risultato del calcolo dell'integrale
- All'interno, ci deve essere un ciclo, nel quale si applica la formula composita di Simpson. In questo caso, è stata usata una formula compatta, che funziona solo per griglie uniformi, con un numero N pari di intervalli

```
function s=simpson(fun,a,b,n)
%
%SIMPSON Calcola integrali usando il metodo di Simpson
%       SIMPSON(FUN,A,B,N): Calcola l'integrale di FUN fra A e B
%       usando la formula di Simpson composita e dividendo
%       [A,B] in N intervalli uguali
%
if mod(n,2) ~= 0      %controlla se n e' pari
  display('N deve essere pari')
  return
end
h=(b-a)/n;
x=a:h:b;
f=feval(fun,x);
s=f(1);
for i=2:2:(n-2)
  s=s+4*f(i)+2*f(i+1);
end
s=s+4*f(n)+f(n+1);
s=s*h/3;
```

Esempio

Calcolo l’integrale fra 0 e pi di f(x) = sin(x)

```
>> f=inline('sin(x)');
```

Questa volta i risultati sono molto più precisi

```
>> format long
>> simpson(f,0,pi,10)
ans =
   2.00010951731500
>> simpson(f,0,pi,20)
ans =
   2.00000678444180
>> simpson(f,0,pi,40)
ans =
   2.00000042309318
```

Funzioni di quadratura di Matlab

- Uso di base di quad e quad8
- Impostare le tolleranze
- Visualizzare la costruzione dell'integrale

Funzioni quad e quad8

Le functions quad e quad8 sono le functions per l'integrazione numerica di Matlab. Il passo di integrazione viene determinato in maniera adattativa, in modo da soddisfare una tolleranza, che può essere fornita in input.
La function quad è basata sulla formula di Simpson, mentre quad8 usa una formula di tipo Newton-Cotes di accuratezza 8.
In Matlab 6, quad8 è stata sostituita dalla function quadl, che usa una formula gaussiana di accuratezza elevata.

Sintassi

La chiamata più semplice è
int = quad (fun,a,b)
fun è una stringa, che contiene il nome della funzione integranda
a e b sono gli estremi di integrazione

Esempio

```
>> f=inline('log(x).^2');
>> int = quad(f,1,3)
int =
   1.02917317609112
```

Per avere una stima del numero di operazioni che sono state effettuate, uso un secondo argomento (opzionale) in output:

```
>> f=inline('log(x).^2');
>> [int, op] = quad(f,1,3)
int =
   1.02917317609112
op =
    25
```

Quindi, per ottenere il risultato, sono state necessarie 25 valutazioni funzionali.

Impostare la tolleranza

Per impostare la tolleranza, devo fornire un ulteriore argomento in input:

```
int = quad(f,a,b, tol)
```

Il valore di default è 1e-3 in Matlab5 e 1e-6 in Matlab6

Tolleranza e numero operazioni

Abbassando la tolleranza, aumenta il numero di operazioni:

```
>> f=inline('x+sin(5*x)')
f =
     Inline function:
     f(x) = x+sin(5*x)
>> [int,c]=quad(f,1,3,1e-3)
int =
   4.20906240989543
c =
    13
```

```
>> [int,c]=quad(f,1,3,1e-4)
int =
   4.20867153987319
c =
    29
>> [int,c]=quad(f,1,3,1e-5)
int =
   4.20867006658840
c =
    45
```

Cifre significative

Calcolando l'integrale due volte, con due valori diversi della tolleranza posso avere una stima del numero di cifre significative.
Per esempio

```
>> [int,c]=quad(f,1,3,1e-4)
int =
  4.20867153987319
c =
   29
>> [int,c]=quad(f,1,3,1e-5)
int =
  4.20867006658840
c =
   45
```

Nella stima dell' integrale ci sono circa 5 cifre significative,
perché le prime 5 cifre restano invariate abbassando la tolleranza.

Visualizzare la costruzione dell'integrale

La chiamata

quad(f, a, b, tol, trace)

dove trace è un qualunque numero diverso da zero, produce un grafico, nel quale vengono evidenziati i punti usati nel corso dell'integrazione

Esercizio 1

Calcolare l'area delle regioni di piano delimitate dalle curve
f(x) = exp(-(x-1)^2)
e:
g(x) = -1/8 x + 1/2

Esercizio 2

Calcolare l'integrale di
$f(x) = |\cos(x)|$
sull'intervallo [0, 6] con 5 cifre decimali significative

Esercizio 3

Data la funzione:

f(x) = exp(-(x-2)^2)   per   -2<x<6
      = 0   altrimenti

calcolare l'integrale su R di x*f(x), che chiamiamo x_{medio} ,
e l'integrale su R di $(x - x_{medio})$^2 * f(x)

Esercizio 4

Calcolare l'integrale della funzione
$f(x) = \sin(1/x)$ su $[0.1, 1]$

1) Usare la function che utilizza il metodo di Simpson su una griglia uniforme. Quanti intervalli è necessario usare per ottenere un risultato con 5 cifre significative?
2) Usare la function quad di Matlab. Che tolleranza è necessario impostare per avere un risultato con 5 cifre significative? Qual è il numero di valutazioni funzionali richiesto in quel caso?

Esercizio 5

Considerare la curva in forma parametrica (x(t), y(t)) dove x(t) e y(t) sono le funzioni integrali:

x(t) = integrale ${}_0^t$ cos(s^2) ds
y(t) = integrale ${}_0^t$ sin(s^2) ds

Stampare un grafico di (x(t), y(t)) per t in [0,4]

Quanto è scomodo Word per scrivere formule di matematica!