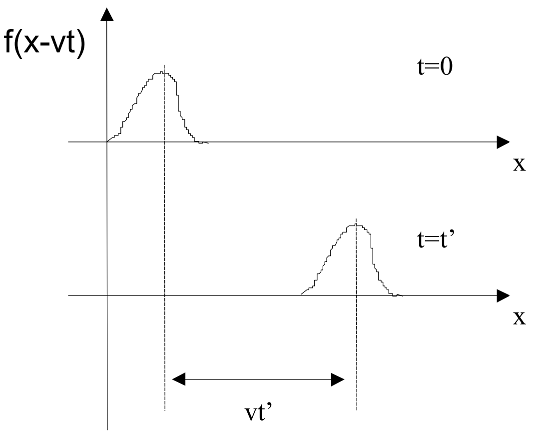
Rappresentazione di onde

La generica espressione di un'onda che si propaga lungo un asse x può essere espressa come

$$f(x,t) = f(x \pm vt) \qquad (1)$$

dove v è la velocità di propagazione, ed il segno davanti ad essa indica la direzione di propagazione



nell'intervallo di tempo t' l'onda si sposta nello spazio rigidamente di una distanza pari a vt'

Qualunque funzione del tipo (1) soddisfa l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \qquad \text{equazione delle onde}$$

Vengono definite armoniche onde del tipo

$$f(x \pm vt) = A sin[k(x \pm vt)] = A sin[kx \pm wt] \qquad \text{con } \omega = v \cdot k$$

Tale onda è caratterizzata da una periodicità spaziale di periodo $\lambda=2\pi/k$, dove λ è la lunghezza d'onda, e da una periodicità temporale di periodo $T=2\pi/\omega$.
La frequenza di oscillazione è $\nu=1/T=\omega/2\pi$ e vale la relazione $\nu\cdot\lambda=v$.
La velocità di fase è la velocità di propagazione di una singola onda armonica $v=\omega/k$. Un qualunque segnale, sia esso periodico non armonico o in generale aperiodico, può essere rappresentato come una somma di funzioni armoniche (analisi di Fourier). Nel caso in cui le funzioni armoniche si propaghino in un mezzo in cui le rispettive velocità di fase v dipendono dalla lunghezza d'onda, la velocità con cui si propaga l'energia trasportata dal segnale è la cosiddetta velocità di gruppo v_g

$$v_g = v + \frac{dv}{dk} \cdot k$$

Equazioni di Maxwell e onde elettromagnetiche

Le equazioni di Maxwell consistono in quattro relazioni che legano il campo elettrico e magnetico, che sono state descritte nelle schede precedenti. Esse possono essere espresse in forma integrale o differenziale:

$\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS = \frac{q}{e_0}$	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{r}{e_0}$	Legge di Gauss per l'elettricità
$\oint \vec{B} \cdot \vec{u}_n dS = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	Legge di Gauss per il magnetismo
$\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_t dl = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \vec{u}_n dS$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\P \vec{B}}{\P t}$	Legge dell'induzione di Faraday
$\oint \vec{B} \cdot \vec{u}_T dS = m_0 I + e_0 m_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS$	$\nabla \times \vec{B} = m_0 \vec{j} + e_0 m_0 \frac{\P \vec{E}}{\P t}$	Legge di Ampère

Supponiamo non vi siano cariche libere statiche né correnti di conduzione, se ci poniamo in un sistema di riferimento cartesiano e supponiamo che i campi elettrico (E) e magnetico (B) siano costantemente orientati rispettivamente lungo gli assi x e y, si dimostra, manipolando opportunamente le equazioni di Maxwell, che i due campi soddisfano l'equazione delle onde

$$\frac{\P^2 E_x}{\P z^2} = m_0 e_0 \frac{\P^2 E_x}{\P t^2} \qquad \frac{\P^2 B_y}{\P z^2} = m_0 e_0 \frac{\P^2 B_y}{\P t^2}$$

per cui le soluzioni delle suddette equazioni non sono altro che onde trasversali tra loro ortogonali (come si suol dire polarizzate linearmente) che si propagano lungo l'asse z (E $\perp$ B) con una velocità $c = \frac{1}{\sqrt{e_0 m_0}}$ che è la velocità della luce nel vuoto ($3 \cdot 10^8$ m/s).

Se sono imposte le soluzioni armoniche per E e B, si ricava che in ogni istante E = c·B.
Le densità volumica di energia elettrica e magnetica sono rispettivamente

$$w_{el} = \frac{1}{2} e_0 E^2 \qquad w_{mag} = \frac{1}{2 m_0} B^2 \qquad \text{per cui} \qquad w_{tot} = w_{el} + w_{mag} = e_0 E^2$$

Un'onda elettromagnetica trasporta nello spazio energia, il flusso di tale energia per unità di tempo per unità di superficie è dato dal vettore di Poynting $\vec{S} = \frac{1}{m_0} \vec{E} \times \vec{B}$ che ha la direzione di propagazione dell'onda.

Una carica elettrica, che si muove di moto accelerato, irradia onde elettromagnetiche; in particolare, una carica che compie oscillazioni armoniche irradia onde armoniche con la stessa frequenza di oscillazione.

Le equazioni di Maxwell possono essere risolte anche nel caso in cui le onde si propaghino in un mezzo materiale diverso dal vuoto; in questo caso la velocità di fase è diversa da c ed è data da v=c/n, dove n è il cosiddetto indice di rifrazione del mezzo.