Flusso vettore

Si consideri una superficie S in una regione dello spazio in cui è presente un campo vettoriale A. In ogni punto della superficie è possibile definire un versore perpendicolare ad S. Si definisce *flusso* del vettore A attraverso la superficie S

$$\Phi_A = \int_S A \cdot u \, ds$$

Nel caso in cui la superficie sia chiusa si assume convenzionalmente che il versore **u** sia orientato verso l'esterno della superficie e si usa la notazione

$$\Phi_A = \oint_S A \cdot u \, ds$$

Teorema di Gauss

Il teorema di Gauss afferma che il flusso del campo elettrico attraverso una qualsiasi superficie chiusa è proporzionale alla carica contenuta al suo interno e precisamente

$$\Phi_A = \oint_S E \cdot u \, ds = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad [1]$$

Questo teorema, derivato dalle leggi fondamentali dell'elettrostatica, risulta molto utile nella soluzione dei problemi di elettrostatica in cui sia possibile, in base a considerazioni di simmetria, determinare la direzione del campo elettrico e quindi scegliere una superficie di integrazione che facilita il calcolo del flusso.
Applicando il teorema della divergenza alla [1] si ottiene una espressione del teorema di Gauss che vale puntualmente e coinvolge grandezze microscopiche

$$div\, E = \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

dove ρ è la densità volumica di carica in un punto dello spazio e l'operatore divergenza è così definito

$$\nabla \cdot E = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \cdot E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial Ey}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Potenziale elettrico

Il lavoro compiuto da forze *conservative* è indipendente dal cammino percorso e quindi per esse è possibile definire un'energia potenziale. Siccome le forze centrali sono conservative , anche per la forza di Coulomb, che ha un andamento del tipo $1/r^2$, è possibile definire un'energia potenziale *U* (che è una grandezza *scalare*). La variazione di energia potenziale di una carica *q* che viene spostata in un campo elettrico da un punto *a* ad un punto *b* è uguale al lavoro compiuto dalla forza elettrica cambiata di segno

$$U_b - U_a = -L_{ab} = -\int_a^b F \cdot ds = -q \int_a^b E \cdot ds$$

E' utile definire il **potenziale elettrico**, o più semplicemente **potenziale**, come *l'energia potenziale per unità di carica*

$$V = \frac{U}{q}$$

L'energia potenziale è definita a meno di una costante, quindi è conveniente determinare la *differenza di potenziale elettrico* (o *tensione*) come

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$$

L'unità di misura della tensione è il volt [V]=[J C^{-1}]. Le relazioni che legano il campo elettrico al potenziale sono

$$V_{ab} = -\int_a^b E \cdot ds$$

$$E = -\nabla V = -\left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) V = \left(\frac{\partial V}{\partial x} i + \frac{\partial V}{\partial y} j + \frac{\partial V}{\partial z} k \right)$$

In un campo elettrico uniforme la differenza di potenziale tra due punti è

$$V_a - V_b = -\int_a^b E \cdot ds = Ed$$

dove *d* indica la proiezione, nella direzione del campo, della distanza tra i due punti.
Per poter definire il potenziale in un punto è necessario scegliere un punto di riferimento in cui il potenziale è nullo; se si suppone che tale punto sia all'infinito, allora per una carica *q* posta nell'origine, il potenziale è dato dalla formula

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$$

Le superfici che hanno lo stesso potenziale si dicono *equipotenziali* e sono perpendicolari alle linee di campo perché spostandosi su di esse il campo E non deve compiere lavoro.