Esercizi svolti

Esercizio 6.1

Una spira circolare di raggio a è percorsa da una corrente di intensità i. Determinare il campo $\vec{B}$ prodotto dalla spira in un punto P sul suo asse, a distanza x dal centro della spira.

Soluzione: un elemento infinitesimo di corrente di lunghezza dl produrrà un campo di modulo

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl}{r^2}, \qquad r^2 = x^2 + a^2$$

la cui direzione forma un angolo ϕ con l'asse della spira, tale che $\cos\phi = a/r$.
Considerando l'elemento di corrente dl', simmetrico di dl rispetto al centro della spira, si vede che la somma vettoriale dei campi $d\vec{B}$ e $d\vec{B}'$ dovuti ai due elementi simmetrici è un vettore parallelo all'asse della spira, poiché le componenti ortogonali all'asse si eliminano.
Poiché la componente di $d\vec{B}$ parallela all'asse è:

$$dB_{//} = dB\cos\phi = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{a}{r^3}dl ,$$

il campo totale in P (diretto lungo l'asse della spira) avrà modulo

$$B = \oint dB_{//} = \frac{\mu_0 i a}{4\pi r^3}\oint dl = \frac{\mu_0 i a^2}{2r^3},$$

ovvero

$$B = \frac{\mu_0 i a^2}{2\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}} .$$

Utilizzando l'espressione precedente è facile ottenere il campo al centro della spira (x=0)

$$B = \frac{\mu_0 i}{2a},$$

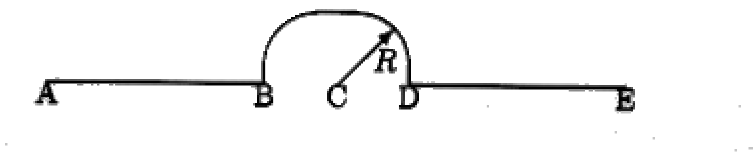
e l'andamento del campo a grande distanza dalla spira ($x \gg a$)

$$B \cong \frac{\mu_0 i a^2}{2x^3},$$

risultato analogo a quello già visto per il dipolo elettrico.

Esercizio 6.2

Determinare il campo $\vec{B}$ nel centro della semicirconferenza (vedi figura) supponendo che il conduttore ABDE sia percorso da una corrente di intensità i.



Soluzione:

Per i due tratti rettilinei $d\vec{l}$ è sempre parallelo ad $\vec{r}$ nella legge di Biot e Savart, quindi il loro contributo è nullo. Per il tratto semicircolare si osservi che il suo contributo è esattamente metà di quello di una spira circolare nel suo centro, e quindi (cfr. l'esercizio precedente)

$$B = \frac{\mu_0 i}{4R}$$

Esercizio 6.3

Una lamina conduttrice infinitamente estesa è percorsa da una corrente di densità lineare λ. Determinare il campo $\vec{B}$ da essa generato.

Soluzione:

Per ragioni di simmetria, il campo deve essere parallelo alla lamina e ortogonale alla direzione della corrente, e può dipendere solo dalla distanza dalla lamina. Inoltre avrà versi opposti dai due lati della lamina. Il modo più semplice per calcolarne il modulo è usare la legge di Ampère, scegliendo come cammino di integrazione un rettangolo, giacente su un piano ortogonale alla direzione della corrente, e simmetrico rispetto alla lamina. Poiché i due lati ortogonali alla lamina non contribuiscono alla circuitazione, si avrà, scegliendo opportunamente il verso di percorrenza,

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{l} = 2lB(x),$$

dove l è la lunghezza dei lati paralleli alla lamina e x la loro distanza dalla lamina stessa. La corrente concatenata con questo cammino ha intensità $i = \lambda l$ e quindi il modulo del campo risulta essere

$$B = \frac{1}{2} m_0 l \,,$$

indipendente da x.

Esercizio 6.4

Un cavo coassiale è costituito da un conduttore interno (cilindro pieno di raggio c) e uno esterno (regione compresa tra due superfici cilindriche di raggi b e $a>b$). I due conduttori sono percorsi da correnti di uguale intensità i dirette in verso opposto, con densità di corrente uniforme. Determinare il campo magnetico in funzione della distanza dall'asse.

Soluzione:

Poiché la distribuzione di correnti ha simmetria cilindrica, le linee del campo $\vec{B}$ devono essere della circonferenze aventi centro sull'asse, orientate in verso antiorario, e il modulo di $\vec{B}$ può dipendere solo dalla distanza dall'asse, $B = B(r)$.
Per determinare $B(r)$ calcoliamo la circuitazione che compare al primo membro della

legge di Ampère pungo una linea di campo, ottenendo

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{l} = 2prB(r).$$

- Per $r<c$ la corrente concatenata con il cammino di integrazione vale

$$i_c = i \frac{r^2}{c^2} ,$$

e quindi il modulo del campo è

$$B(r) = \frac{m_0 ir}{2pc^2} .$$

- Per $c<r<b$ si ha $i_c = i$ e quindi

$$B(r) = \frac{m_0 i}{2pr} .$$

- Per $b<r<a$ si ha

$$i_c = i - i \frac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2} = i \frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2} ,$$

da cui

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}.$$

- Infine per *r*>*a* si ha $i_c = 0$ e quindi $B(r) \equiv 0$.

Esercizio 6.5

Un avvolgimento di corrente di forma toroidale e sezione rettangolare è costituito da *n*=100 spire percorse da una corrente *i* = 5 A. I raggi interno ed esterno sono rispettivamente r_1 = 5 cm ed r_2 = 6 cm, e la larghezza del toroide è *a* = 1 cm. Determinare il campo $\vec{B}$ all'interno del toroide e i suoi valori massimo e minimo.

Soluzione:

Si applica la legge di Ampère scegliendo come cammino di integrazione una circonferenza di raggio *r*, coassiale con il toroide e ad esso interna, ottenendo

$$2\pi r B(r) = \mu_0 n I \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r}.$$

Direzione e verso di $\vec{B}$ sono determinati dalle condizioni di simmetria.
Per i valori minimo e massimo si ottiene:

$$B_{\min} = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r_2} \cong 1.67 \cdot 10^{-3} \quad T$$

$$B_{\max} = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r_1} \cong 2.00 \cdot 10^{-3} \quad T.$$

Esercizi proposti

Esercizio 6.6

Un protone di massa $m = 1.6 \cdot 10^{-7} \quad kg$, di energia cinetica $E = 1.6 \cdot 10^{-17} \quad J$ e velocità diretta radialmente si trova sull'asse di un solenoide rettilineo indefinito di raggio R = 10 cm e costituito da *n* = 100 *spire/cm.* Quale valore deve avere la corrente elettrica per impedire al protone di uscire dal solenoide?

Risultato: $i \geq 1.15 \;\; A$

Esercizio 6.7

Due fili rettilinei indefiniti sono posti verticalmente in posizione fissa e parallelamente a distanza d l'uno dall'altro; in essi fluiscono le correnti i_1 e i_2. Nel piano che li contiene e fra di essi è posto un terzo filo parallelo ai primi due, nel quale fluisce la corrente i_3; esso è libero di spostarsi lateralmente, mantenendosi parallelo a sé stesso, nel piano dei primi due. Determinare la posizione di equilibrio stabile o instabile.

Risultato: La posizione di equilibrio si trova a distanza $di_1/(i_1+i_2)$ dal filo 1; l'equilibrio è instabile se i_3 ha lo stesso verso di i_1 e i_2, stabile se ha verso opposto.

Esercizio 6.8

Sulla superficie di un disco di plastica di raggio a, è distribuita uniformemente una carica q. Se il disco è posto in rotazione uniforme attorno al suo asse, con velocità angolare w, determinare il campo magnetico al centro del disco e il momento di dipolo del disco.
Suggerimento: scomporre il disco in spire concentriche infinitesime.

Risultato:

$$B = \frac{m_0 w q}{2 p a}$$

$$m = \frac{w q a^2}{2}.$$

Esercizio 6.9

Nel modello di Bohr dell'atomo di idrogeno, l'elettrone ruota intorno al nucleo ad una frequenza $n = 7 \cdot 10^{15} \;\; \sec^{-1}$ e genera un campo magnetico B = 14 T al centro dell'orbita. Calcolare il raggio dell'orbita dell'elettrone.

Risultato:

$$a = 5 \cdot 10^{-11} \;\; m.$$

Esercizio 6.10

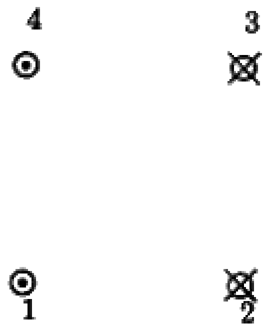
Una spira rettangolare di lati a e b, percorsa da una corrente di intensità i, so trova sullo stesso piano di un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente I, con i lati di lunghezza *a* paralleli al filo. Il più vicino dei due lati di lunghezza *a* dista *d* dal filo stesso e la corrente in esso ha lo stesso verso di quella nel filo. Determinare la forza risultante sulla spira.

Risultato:

$$F = \frac{m_0 liab}{2pd(d+b)}.$$

Esercizio 6.11

Quattro lunghi fili di rame sono fra loro paralleli e disposti ai vertici di un quadrato di lato *a=20 cm.* In ogni filo circola una corrente *i=20* A nel verso mostrato in figura. Determinare $\vec{B}$ al centro del quadrato.



Risultato: Il campo risultante è diretto verso l'alto e vale

$$B = 8 \cdot 10^{-5} \quad T .$$