

**Esercizi svolti****Esercizio 3.1**

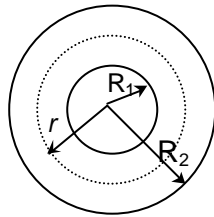
Calcolare le componenti cartesiane del campo elettrico generato da un dipolo  $p$  orientato lungo l'asse  $x$  in un punto lontano rispetto alle dimensioni del dipolo.

**Soluzione:**

$$E_x = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \quad E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \quad E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

**Esercizio 3.2**

Calcolare la capacità di un condensatore formato da due superfici sferiche concentriche di raggio  $R_1$  ed  $R_2$  e caricate con una carica  $Q$ .



**Soluzione:** Si applica il teorema di Gauss ad una sfera concentrica con quelle del condensatore ed avente raggio  $R_1 < r < R_2$ . Le linee di forza hanno un andamento radiale e quindi

$$\Phi_E = E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}; \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

La differenza di potenziale tra le due sfere è

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E \cdot dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}$$

ricordando che  $C = Q/\Delta V$  si ricava

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$$



Si noti che

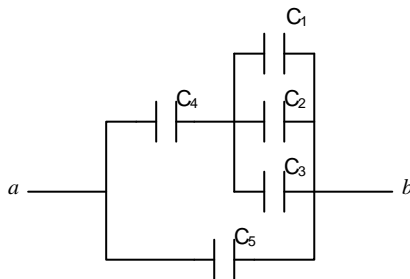
- a) se  $R_2 \gg R_1$  allora  $C = 4\epsilon_0 R_1$   
 b) se  $R_2 \approx R_1 \approx R$ , con  $d = R_2 - R_1$ ,

$$C = 4\epsilon_0 \frac{R^2}{d} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

che è il valore di un condensatore piano.

**Esercizio 3.3**

Determinare la capacità e l'energia totale del circuito in figura quando  $C_1 = 1 \text{ pF}$ ,  $C_2 = 2 \text{ pF}$ ,  $C_3 = 3 \text{ pF}$ ,  $C_4 = 4 \text{ pF}$ ,  $C_5 = 5 \text{ pF}$  e  $V_{ab} = 100 \text{ V}$ . Calcolare, inoltre, la carica e la tensione di ciascun condensatore.



**Soluzione:** Applicando le regole sui condensatori in parallelo ed in serie si ottiene

$$C_{123} = C_1 + C_2 + C_3 = 6 \text{ pF}$$

$$C_{1234} = \frac{C_{123}C_4}{C_{123} + C_4} = 2.4 \text{ pF}$$

$$C_{tot} = C_{1234} + C_5 = 7.4 \text{ pF}$$

L'energia del sistema è

$$W_{tot} = \frac{1}{2} C_{tot} V_{ab}^2 = 3.7 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

Le cariche ed i potenziali di ogni condensatore sono rispettivamente

$$V_5 = V_{ab} = 100 \text{ V} \quad q_5 = C_5 V_5 = 0.5 \text{ nC} \quad q_4 = C_{1234} V_{ab} = 0.24 \text{ nC} \quad V_4 = \frac{q_4}{C_4} = 60 \text{ V}$$

$$V_{123} = V_{ab} - V_4 = 40 \text{ V} \quad q_1 = C_1 V_{123} = 40 \text{ pC} \quad q_2 = C_2 V_{123} = 80 \text{ pC} \quad q_3 = C_3 V_{123} = 120 \text{ pC}$$



**Esercizio 3.4**

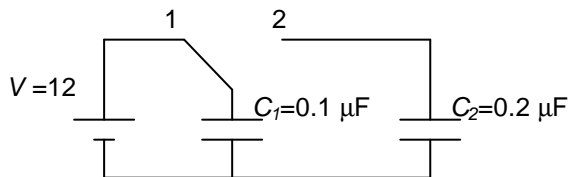
Sia dato un condensatore piano con armature di area  $A$  e distanti  $d$  (supporre  $d$  trascurabile rispetto alle dimensioni delle armature). Calcolare la forza che un'armatura esercita sull'altra quando il condensatore possiede una carica  $Q$ .

**Soluzione:**  $E = \frac{Q}{2\epsilon_0 A}$      $F = QE$      $F = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A}$

**Esercizio 3.5**

Nel circuito di figura il deviatore è inizialmente nella posizione 1, quindi viene commutato sulla posizione 2. Calcolare:

- a) l'energia fornita dal generatore quando siamo nella posizione 1;
- b) la quantità di carica posseduta dai due condensatori nella posizione 2;
- c) l'energia incamerata nei due condensatori nella posizione 2.



**Soluzione:** L'energia fornita dal generatore coincide con l'energia posseduta dal condensatore  $C_1$  nella posizione 1

$$W = \frac{1}{2} C_1 V^2 = 7.2 \text{ mJ}$$

La carica posseduta  $C_1$  in questa condizione è

$$Q = C_1 V = 1.2 \text{ μC}$$

Quando si passa alla posizione 2 la carica che era posseduta solo da  $C_1$  si distribuisce anche su  $C_2$  in modo che la differenza di potenziale sui due condensatori sia uguale; possiamo, dunque, scrivere le due equazioni

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad ; \quad \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

da cui si ricava:



$$Q_2 = \frac{Q}{\frac{C_1}{C_2} + 1} = 0.8 \text{ nC}$$

$$Q_1 = Q - Q_2 = 0.4 \text{ nC}$$

L'energia posseduta dai due condensatori nella posizione 2 è

$$W_1 = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1} = 0.8 \text{ nJ}$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_2} = 1.6 \text{ nJ}$$

Si osserva che l'energia totale del sistema nella posizione 2 è minore di quella di partenza. Il motivo è da attribuire alle perdite che avvengono nel transitorio tra le due configurazioni.

## Esercizi proposti

### **Esercizio 3.6**

Un sottile conduttore rettilineo collega due sfere metalliche scariche, la cui lunghezza è grande rispetto ai raggi delle due sfere ( $R_1=10$  cm,  $R_2=20$  cm). La sfera di raggio minore è cava. Se a 4 cm dal suo centro viene posta una carica positiva  $q$  e il suo potenziale risulta in tal modo di 10 volt, quanto vale la carica  $q$ ?

**Risultato:**  $q=3.32 \cdot 10^{-10}$  coulomb

### **Esercizio 3.7**

Una sfera metallica isolata di raggio  $R=30$  cm porta una carica elettrica  $Q=23,5$  coulomb. Si determini il raggio  $R'$  della sfera entro cui è contenuto il 90% dell'energia elettrostatica del sistema.

**Risultato:**  $R'=3$  m

### **Esercizio 3.8**

Un condensatore da 2 microfarad è carico a 10000 volt. Esso viene connesso in parallelo con un condensatore da 8 microfarad. Qual' è il potenziale  $V$  risultante? Qual è l'energia immagazzinata  $U$  e  $U'$  nei condensatori prima e dopo averli collegati?

**Risultato:**  $V=2 \cdot 10^3$  volt,  $U=100$  joule,  $U'=10$  joule



**Esercizio 3.9**

Una carica elettrica  $Q=2$  coulomb può essere ripartita tra due conduttori sferici di raggi  $R_1=10$  cm e  $R_2=20$  cm rispettivamente. I due conduttori sono posti a distanza grande rispetto ad  $R_1$  e  $R_2$ , cosicché i fenomeni di induzione elettrostatica possono essere trascurati.

Determinare:

Come deve essere ripartita la carica  $q$  tra i due conduttori affinché l'energia potenziale del sistema risulti minima?

Quale relazione sussiste tra i potenziali  $V_1$  e  $V_2$  delle due sfere quando si realizza la condizione di cui al punto 1).

**Risultato:**  $Q_1=1$  coulomb ,  $Q_2=1$  coulomb ,  $V_1=V_2$

**Esercizio 3.10**

Una d.d.p.  $V=100$  volt è applicata ha un condensatore piano. Lo spazio fra le armature è riempito con acqua a  $20$  °C ( $\epsilon_r =80.3$ ). Successivamente il sistema viene portato alla temperatura di  $60$  °C e si constata che la d.d.p. fra le armature è salita al valore  $V'=121$  volt. Quanto vale la costante dielettrica dell'acqua  $\epsilon_r$  a  $60$  °C? In quale percentuale varia l'energia elettrostatica  $U$  del sistema?

**Risultato:**  $\epsilon_r=66.3$ ,  $U'/U=21/100$



**Quiz a risposta multipla**

- 1) Un condensatore a facce piane e parallele viene riempito per metà del suo volume interno da un dielettrico con costante dielettrica relativa  $\epsilon_r = 2$ . Se  $C_0$  era la capacità del condensatore quando tra le armature c'era solo l'aria, la sua nuova capacità è:
- minore della capacità  $C_0$ .
  - esattamente uguale alla capacità  $C_0$ .
  - maggiore della capacità  $C_0$ .
  - maggiore o minore della capacità  $C_0$  a seconda che la superficie di separazione tra dielettrico e aria sia parallela o perpendicolare alle armature.
- 2) In quale rapporto sta il raggio terrestre ( $R \approx 6 \cdot 10^6$  m) con il raggio  $r$  di una sfera conduttrice avente la capacità di un Farad?
- $R/r \approx 10^{-2}$ .
  - $R/r \approx 10^2$ .
  - $R/r \approx 10^4$ .
  - $R/r \approx 1$ .
- 3) Devo realizzare una capacità di  $8 \pm 1$  nF ma dispongo solo di 3 condensatori di capacità  $C_1=C_2= 10$  nF e  $C_3= 50$  nF. Posso ottenere la capacità richiesta collegando:
- tutti e tre i condensatori in serie.
  - $C_1$  e  $C_2$  in parallelo tra loro e  $C_3$  in serie al parallelo dei due.
  - non posso ottenere in nessun modo la capacità richiesta.
  - $C_1$  e  $C_3$  in parallelo tra loro e  $C_2$  in serie al parallelo dei due.
- 4) Un condensatore piano carico e isolato viene connesso in parallelo ad un condensatore identico ma scarico. Se  $W$  è l'energia immagazzinata nel primo condensatore, l'energia finale del sistema è:
- $W_1=W$ .
  - $W_1=2W$ .
  - $W_1=W/4$ .
  - $W_1=W/2$ .
- 5) Se le armature di un condensatore piano, connesso con un generatore di f.e.m. costante, sono lasciate libere di muoversi, esse tendono ad avvicinarsi perché portatrici di cariche di segno opposto e:
- L'energia elettrostatica diminuisce, trasformandosi in energia cinetica delle armature.
  - L'energia elettrostatica aumenta.
  - L'energia elettrostatica rimane invariata.



---

d) La carica elettrica sulle armature diminuisce fino ad annullarsi quando le due armature giungono a contatto.