

Esercizi svolti**Esercizio 3.1**

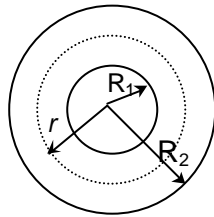
Calcolare le componenti cartesiane del campo elettrico generato da un dipolo p orientato lungo l'asse x in un punto lontano rispetto alle dimensioni del dipolo.

Soluzione:

$$E_x = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \quad E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \quad E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

Esercizio 3.2

Calcolare la capacità di un condensatore formato da due superfici sferiche concentriche di raggio R_1 ed R_2 e caricate con una carica Q .



Soluzione: Si applica il teorema di Gauss ad una sfera concentrica con quelle del condensatore ed avente raggio $R_1 < r < R_2$. Le linee di forza hanno un andamento radiale e quindi

$$\Phi_E = E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}; \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

La differenza di potenziale tra le due sfere è

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E \cdot dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}$$

ricordando che $C = Q/\Delta V$ si ricava

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$$



Si noti che

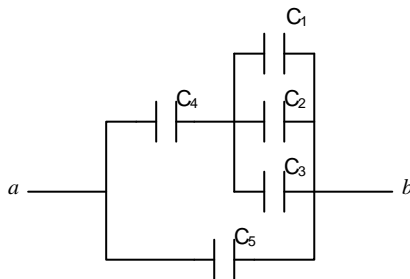
- a) se $R_2 \gg R_1$ allora $C = 4\epsilon_0 R_1$
 b) se $R_2 \approx R_1 \approx R$, con $d = R_2 - R_1$,

$$C = 4\epsilon_0 \frac{R^2}{d} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

che è il valore di un condensatore piano.

Esercizio 3.3

Determinare la capacità e l'energia totale del circuito in figura quando $C_1 = 1 \text{ pF}$, $C_2 = 2 \text{ pF}$, $C_3 = 3 \text{ pF}$, $C_4 = 4 \text{ pF}$, $C_5 = 5 \text{ pF}$ e $V_{ab} = 100 \text{ V}$. Calcolare, inoltre, la carica e la tensione di ciascun condensatore.



Soluzione: Applicando le regole sui condensatori in parallelo ed in serie si ottiene

$$C_{123} = C_1 + C_2 + C_3 = 6 \text{ pF}$$

$$C_{1234} = \frac{C_{123}C_4}{C_{123} + C_4} = 2.4 \text{ pF}$$

$$C_{tot} = C_{1234} + C_5 = 7.4 \text{ pF}$$

L'energia del sistema è

$$W_{tot} = \frac{1}{2} C_{tot} V_{ab}^2 = 3.7 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

Le cariche ed i potenziali di ogni condensatore sono rispettivamente

$$V_5 = V_{ab} = 100 \text{ V} \quad q_5 = C_5 V_5 = 0.5 \text{ nC} \quad q_4 = C_{1234} V_{ab} = 0.24 \text{ nC} \quad V_4 = \frac{q_4}{C_4} = 60 \text{ V}$$

$$V_{123} = V_{ab} - V_4 = 40 \text{ V} \quad q_1 = C_1 V_{123} = 40 \text{ pC} \quad q_2 = C_2 V_{123} = 80 \text{ pC} \quad q_3 = C_3 V_{123} = 120 \text{ pC}$$

Esercizio 3.4

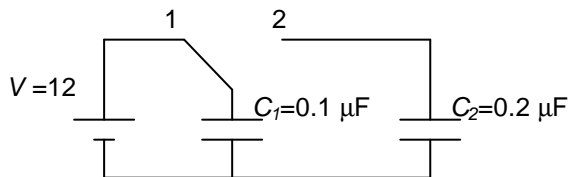
Sia dato un condensatore piano con armature di area A e distanti d (supporre d trascurabile rispetto alle dimensioni delle armature). Calcolare la forza che un'armatura esercita sull'altra quando il condensatore possiede una carica Q .

Soluzione:
$$E = \frac{Q}{2\epsilon_0 A} \quad F = QE \quad F = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 A}$$

Esercizio 3.5

Nel circuito di figura il deviatore è inizialmente nella posizione 1, quindi viene commutato sulla posizione 2. Calcolare:

- l'energia fornita dal generatore quando siamo nella posizione 1;
- la quantità di carica posseduta dai due condensatori nella posizione 2;
- l'energia incamerata nei due condensatori nella posizione 2.



Soluzione: L'energia fornita dal generatore coincide con l'energia posseduta dal condensatore C_1 nella posizione 1

$$W = \frac{1}{2} C_1 V^2 = 7.2 \text{ mJ}$$

La carica posseduta C_1 in questa condizione è

$$Q = C_1 V = 1.2 \text{ μC}$$

Quando si passa alla posizione 2 la carica che era posseduta solo da C_1 si distribuisce anche su C_2 in modo che la differenza di potenziale sui due condensatori sia uguale; possiamo, dunque, scrivere le due equazioni

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad ; \quad \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

da cui si ricava:



$$Q_2 = \frac{Q}{\frac{C_1}{C_2} + 1} = 0.8 \text{ mC}$$

$$Q_1 = Q - Q_2 = 0.4 \text{ mC}$$

L'energia posseduta dai due condensatori nella posizione 2 è

$$W_1 = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1} = 0.8 \text{ mJ}$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_2} = 1.6 \text{ mJ}$$

Si osserva che l'energia totale del sistema nella posizione 2 è minore di quella di partenza. Il motivo è da attribuire alle perdite che avvengono nel transitorio tra le due configurazioni.

Esercizi proposti

Esercizio 3.6

Un sottile conduttore rettilineo collega due sfere metalliche scariche, la cui lunghezza è grande rispetto ai raggi delle due sfere ($R_1=10$ cm, $R_2=20$ cm). La sfera di raggio minore è cava. Se a 4 cm dal suo centro viene posta una carica positiva q e il suo potenziale risulta in tal modo di 10 volt, quanto vale la carica q ?

Risultato: $q=3.32 \cdot 10^{-10}$ coulomb

Esercizio 3.7

Una sfera metallica isolata di raggio $R=30$ cm porta una carica elettrica $Q=23,5$ coulomb. Si determini il raggio R' della sfera entro cui è contenuto il 90% dell'energia elettrostatica del sistema.

Risultato: $R'=3$ m

Esercizio 3.8

Un condensatore da 2 microfarad è carico a 10000 volt. Esso viene connesso in parallelo con un condensatore da 8 microfarad. Qual' è il potenziale V risultante? Qual è l'energia immagazzinata U e U' nei condensatori prima e dopo averli collegati?

Risultato: $V=2 \cdot 10^3$ volt, $U=100$ joule, $U'=10$ joule



Esercizio 3.9

Una carica elettrica $Q=2$ coulomb può essere ripartita tra due conduttori sferici di raggi $R_1=10$ cm e $R_2=20$ cm rispettivamente. I due conduttori sono posti a distanza grande rispetto ad R_1 e R_2 , cosicché i fenomeni di induzione elettrostatica possono essere trascurati.

Determinare:

Come deve essere ripartita la carica q tra i due conduttori affinché l'energia potenziale del sistema risulti minima?

Quale relazione sussiste tra i potenziali V_1 e V_2 delle due sfere quando si realizza la condizione di cui al punto 1).

Risultato: $Q_1=1$ coulomb , $Q_2=1$ coulomb , $V_1=V_2$

Esercizio 3.10

Una d.d.p. $V=100$ volt è applicata ha un condensatore piano. Lo spazio fra le armature è riempito con acqua a 20 °C ($\epsilon_r =80.3$). Successivamente il sistema viene portato alla temperatura di 60 °C e si constata che la d.d.p. fra le armature è salita al valore $V'=121$ volt. Quanto vale la costante dielettrica dell'acqua ϵ_r a 60 °C? In quale percentuale varia l'energia elettrostatica U del sistema?

Risultato: $\epsilon_r=66.3$, $U'/U=21/100$



Quiz a risposta multipla

- 1) Un condensatore a facce piane e parallele viene riempito per metà del suo volume interno da un dielettrico con costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 2$. Se C_0 era la capacità del condensatore quando tra le armature c'era solo l'aria, la sua nuova capacità è:
- minore della capacità C_0 .
 - esattamente uguale alla capacità C_0 .
 - maggiore della capacità C_0 .
 - maggiore o minore della capacità C_0 a seconda che la superficie di separazione tra dielettrico e aria sia parallela o perpendicolare alle armature.
- 2) In quale rapporto sta il raggio terrestre ($R \approx 6 \cdot 10^6$ m) con il raggio r di una sfera conduttrice avente la capacità di un Farad?
- $R/r \approx 10^{-2}$.
 - $R/r \approx 10^2$.
 - $R/r \approx 10^4$.
 - $R/r \approx 1$.
- 3) Devo realizzare una capacità di 8 ± 1 nF ma dispongo solo di 3 condensatori di capacità $C_1=C_2= 10$ nF e $C_3= 50$ nF. Posso ottenere la capacità richiesta collegando:
- tutti e tre i condensatori in serie.
 - C_1 e C_2 in parallelo tra loro e C_3 in serie al parallelo dei due.
 - non posso ottenere in nessun modo la capacità richiesta.
 - C_1 e C_3 in parallelo tra loro e C_2 in serie al parallelo dei due.
- 4) Un condensatore piano carico e isolato viene connesso in parallelo ad un condensatore identico ma scarico. Se W è l'energia immagazzinata nel primo condensatore, l'energia finale del sistema è:
- $W_1=W$.
 - $W_1=2W$.
 - $W_1=W/4$.
 - $W_1=W/2$.
- 5) Se le armature di un condensatore piano, connesso con un generatore di f.e.m. costante, sono lasciate libere di muoversi, esse tendono ad avvicinarsi perché portatrici di cariche di segno opposto e:
- L'energia elettrostatica diminuisce, trasformandosi in energia cinetica delle armature.
 - L'energia elettrostatica aumenta.
 - L'energia elettrostatica rimane invariata.



d) La carica elettrica sulle armature diminuisce fino ad annullarsi quando le due armature giungono a contatto.