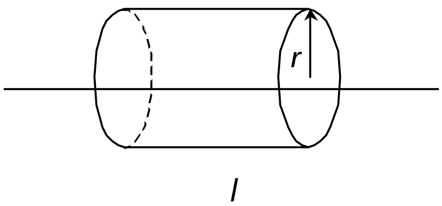
Esercizi svolti

Esercizio 2.1

Su di un filo di lunghezza infinita è distribuita una carica uniforme per unità di lunghezza λ = 25 nC/m. Calcolare il campo elettrico in un punto che dista 15 cm dal filo.



Soluzione: La direzione del campo elettrico, grazie alla simmetria del problema, è radiale rispetto al filo, quindi applicando il teorema di Gauss alla superficie riportata in figura si ottiene un contributo al flusso solo dalla superficie laterale del cilindro

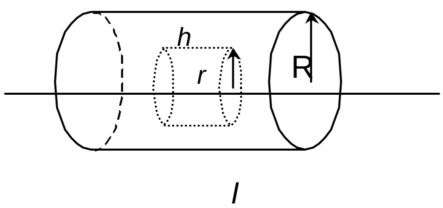
$$\Phi_e = \int E \cdot ds = E(r) 2\pi r l = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

da questa relazione si può ricavare il valore del campo elettrico in funzione *r*

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = 3 \cdot 10^3 \ \ \mathrm{N/C}$$

Esercizio 2.2

Si consideri un cilindro di raggio R e lunghezza indefinita entro il quale vi siano delle cariche distribuite con densità di volume uniforme ρ. Determinare il campo elettrostatico in un generico punto P all'interno del cilindro e la differenza di potenziale tra l'asse del cilindro e le superfici laterali.



Soluzione: Consideriamo il cilindro, coassiale a quello dato, passante per il generico punto P distante *r* dall'asse. Il campo elettrico è radiale rispetto all'asse del cilindro, per cui contribuisce al calcolo del flusso solo la superficie laterale

$$\Phi_e = \int E \cdot ds = E(r) 2\pi r h = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \pi r^2 h}{\varepsilon_0}$$

da cui si ricava il campo

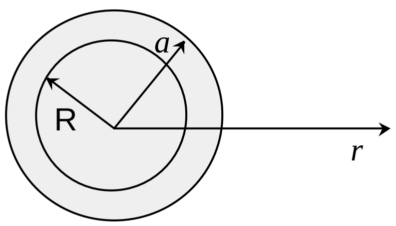
$$E(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

La differenza di potenziale è

$$V_0 - V_R = \int_0^R E \cdot dr = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int_0^R r\, dr = \frac{\rho}{4\varepsilon_0}R^2$$

Esercizio 2.3

Una sfera di raggio *a* possiede una densità di carica $\rho = k / r^2$, dove *r* indica la distanza dal centro della sfera e k è una costante. Calcolare il campo elettrico ed il potenziale all'interno della sfera considerando che all'esterno della sfera sia $\rho = 0$.



Soluzione: La simmetria sferica implica che il campo è radiale, quindi si può applicare il teorema di Gauss ad una sfera di raggio *R* concentrica a quella data. La carica contenuta all'interno di tale sfera è

$$q = \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr = 4\pi k R$$

Il campo su tale sfera vale

$$E(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{k}{\varepsilon_0 R}$$

Calcoliamo ora il potenziale della sfera di raggio *R*, supponendo di porre $V_\infty = V(r = \infty) = 0$,

$$V_R = \int_R^\infty E dr = \int_R^a E dr + \int_a^\infty E dr$$

il secondo integrale indica il potenziale sulla superficie della sfera di raggio *a* che contiene la carica totale $q = 4\pi k a$ e quindi vale

$$V_a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{k}{\varepsilon_0}$$

si ottiene, infine,

$$V_R = \int_R^a E dr + V_a = \int_R^a \frac{k}{\varepsilon_0 r} dr + V_a = \frac{k}{\varepsilon_0}\left(\log\frac{a}{R} + 1\right)$$

Esercizio 2.4

Nel tubo catodico di un televisore gli elettroni vengono accelerati, partendo dalla condizione di riposo, da una tensione di 4000 V. Calcolare la velocità finale dell'elettrone.

Soluzione: La variazione di energia potenziale subita dall'elettrone in seguito all'effetto del potenziale è

$$\Delta U = qV = .6.4 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

La diminuzione di energia potenziale si trasforma in energia cinetica e ricordando che l'elettrone parte da fermo si ottiene

Esercizio 2.5

Con la stessa geometria dell'esercizio 1.3 calcolare il potenziale lungo l'asse e quindi ricavare il campo elettrico.

Soluzione: Ogni elemento dell'anello, che possiede una carica *dQ*, crea un potenziale che vale

$$E(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r}$$

Il potenziale totale si ottiene integrando tutti i contributi *dV*

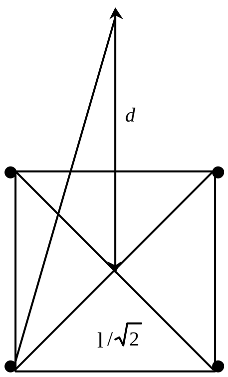
$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Il campo elettrico si ricava derivando il potenziale rispetto alla variabile *x*

$$E_0 = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

Esercizio 2.6

Sui vertici di un quadrato di lato $l = 5 \cdot 10^{-9}$ m vi sono quattro protoni. Calcolare quale velocità deve avere un protone che si muove lungo la perpendicolare al quadrato passante per il suo centro ed inizialmente ad una distanza $d = 5 \cdot 10^{-9}$ m, affinché riesca a raggiungere il centro del quadrato.



Soluzione:

$$V = \frac{4q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U = \frac{4q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$r_d = \sqrt{d^2 + \frac{l^2}{2}}$$

$$r_0 = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

$$\Delta U = \frac{4q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_d} - \frac{1}{r_0}\right) = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{l\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + \frac{l^2}{2}}}\right) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2q^2}{m\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{l\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + \frac{l^2}{2}}}\right)} = 1.15 \cdot 10^4 \quad \mathrm{m/s}$$

Esercizi proposti

Esercizio 2.7

Un filo rettilineo indefinito è carico con densità lineare ë=8.85 10^{-8} coulomb/metro. Trovare il campo elettrico E a 10 metri di distanza dal filo.
Risultato: E=1.6 10^{2} newton/metro

Esercizio 2.8

Calcolare il lavoro L necessario per caricare una sfera conduttrice di raggio R= 10 cm e con una carica q=1 ìcoulomb.
Risultato: L=4.5 10^{-2} joule

Esercizio 2.9

Due armature metalliche piane e parallele si trovano alla distanza d=1 cm. Ciascuna delle armature ha un' area S=10 cm^{2}. Esse vengono caricate con cariche uguali e di segno contrario q=10^{-10} coulomb. Calcolare la differenza di potenziale fra le armature.
Risultato: ÄV=113 volt

Esercizio 2.10

Una carica positiva q è distribuita su tutto il volume di una sfera di raggio R. La densità di carica varia con il raggio secondo la legge: ñ=á r. Determinare á e il campo elettrico E all'interno della sfera.
Risultato: á=q/(ðR^{4}), E=q r^{2}/(4 ð $å_{0}$ R^{4})

Esercizio 2.11

Un cilindro circolare retto di altezza indefinita e raggio R è carico di segno negativo su tutto il volume con densità di carica ñ. Trovare il campo elettrico E all'interno del cilindro e successivamente la differenza di potenziale fra l'asse e le generatrici.
Risultato: E= ñ r/(2 $å_{0}$), ÄV=ñ R^{2}/(4 $å_{0}$)