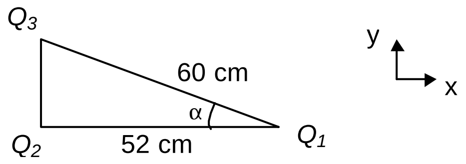
Esercizi svolti

Esercizio 1.1

Calcolare la forza che agisce sulla carica Q_1 = 100 μC, dovuta alle cariche Q_2 = -30 μC e Q_3 = 70 μC disposte come riportato in figura



Soluzione: La forza che agisce sulla carica Q_1 è data dalla composizione vettoriale delle forze dovute alle due cariche Q_3 e Q_3

$$|F_{12}| = \left| k \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \right| = 99.9\ N$$

$$|F_{13}| = \left| k \frac{Q_1 Q_3}{r_{13}^2} \right| = 175\ N$$

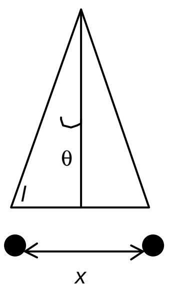
$$|F_{13x}| = |F_{13}| \cos \alpha - |F_{12}| = 51.7\ N$$

$$|F_{13y}| = -|F_{13}| \operatorname{sen} \alpha = -87.5\ N$$

$$F_{13} = F_{13}\mathrm{i} + F_{13}\mathrm{j} = (51.7\mathrm{i} - 87.5\mathrm{j})\ N$$

Esercizio 1.2

Due palline, con uguale massa *m* e carica *q*, sono appese come mostrato in figura. Calcolare la distanza tra le due palline sapendo che $q = 2.4 \cdot 10^{-6}$ C, *l* =120 cm e *m* = 10 g.



Soluzione: Sulle palline agiscono la forza peso e la forza di Coulomb

$$F_e = k \frac{q^2}{x^2} \qquad F_p = mg$$

All'equilibrio la forza risultante che agisce sulle palline deve avere la stessa direzione del filo che le sostiene, quindi deve essere:

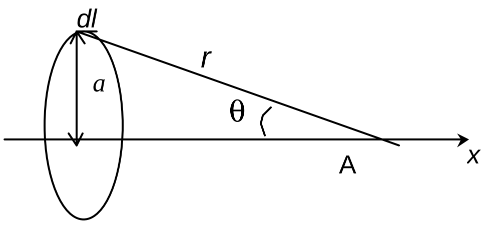
$$\tan\theta = \frac{F_e}{F_p}$$

Facendo l'ipotesi che l'angolo θ sia piccolo $(\tan\theta \approx \mathrm{sen}\,\theta = \frac{x}{2l})$ si ottiene

$$x^3 = \frac{lq^2}{2\pi\varepsilon_0 mg}; \qquad x = 10.8\ cm$$

Esercizio 1.3

Un sottile anello di raggio *a* possiede una carica totale *Q* distribuita uniformemente su di esso. Calcolare il valore del campo elettrico per un generico punto A sull'asse dell'anello.



Soluzione: La carica presente su un segmentino d*l* dell'anello è

$$dQ = \frac{Q}{2\pi a} dl$$

e produce un campo elettrico

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{2\pi a r^3} dl$$

Il campo totale è dato dall'integrazione su tutta la circonferenza, ma per ragioni di simmetria il campo risultante è diretto lungo *x*, quindi

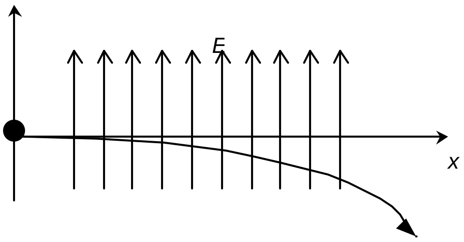
$$E = \int dE_x = \int \cos\theta \, dE$$

$$r = \sqrt{x^2 + a^2} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{2\pi a (x^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi a} dl = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Esercizio 1.4

Un elettrone che si muove lungo la direzione *x* con velocità $v_0 = 10^7$ m/s è sottoposto, per un tratto lungo d = 4 cm, ad un campo elettrico uniforme E = 10^4 N/C ortogonale alla sua velocità. Calcolare in quale direzione si muove l'elettrone dopo aver attraversato la regione in cui è presente il campo elettrico.



Soluzione: Il campo elettrico imprime all'elettrone un'accelerazione

$$a_y = \frac{F}{m} = -\frac{qE}{m}$$

che lo fa spostare nella direzione *y* secondo la legge

$$y = \frac{1}{2} a_y t^2$$

mentre lungo l'asse *x* si muove con moto uniforme

$$x = v_0 t$$

Eliminando la variabile *t* dalle equazioni si ottiene

$$y = -\frac{qE}{2mv_0^2} x^2$$

Le componenti della velocità dell'elettrone all'uscita del campo sono

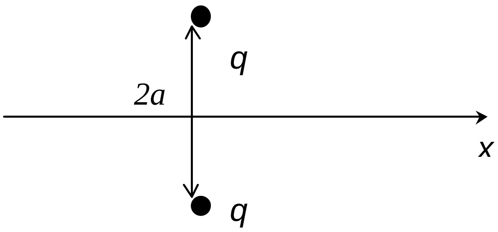
$$v_y = \sqrt{2a_y y} = \frac{qEd}{mv_0} \qquad v_x = v_0$$

da cui è possibile ricavare l'angolo che la direzione dell'elettrone forma con l'asse *x*

$$\tan\theta = \frac{-v_y}{v_x} = \frac{qEx}{mv_0^2} = -0.7 \qquad \theta = -35°$$

Esercizio 1.5

Su un piano orizzontale sono poste due cariche *q* ad una distanza 2*a* l'una dall'altra. Determinare il punto appartenente all'asse *x* (perpendicolare alla congiungente delle due cariche e passante per il suo punto medio) in cui il campo elettrico raggiunge il valore massimo.



Soluzione:

$$E = k\frac{q}{a^2 + x^2} \qquad E_x = E_1 \cos\theta \qquad E_y = E_1 \operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} \qquad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$E_x = k\frac{q}{a^2 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = kq\frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\frac{dE_x}{dx} = kq\frac{(a^2 + x^2)^{3/2} - 3x^2\sqrt{a^2 + x^2}}{(a^2 + x^2)^3} = kq\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{(a^2 + x^2)^3}(a^2 + x^2 - 3x^2)$$

$$\frac{dE_x}{dx} = 0 \Rightarrow a^2 - 2x^2 = 0 \qquad x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$

Esercizi proposti

Esercizio 1.6

Un dipolo elettrico di momento **p** è posto a distanza a= 1 m da una carica puntiforme $Q=+10^{-10}$ coulomb parallelamente al campo elettrico generato da quest'ultima.
Se sul dipolo agisce una forza di intensità F= 1 newton, quanto vale il momento di dipolo?
Come deve essere orientato il dipolo affinché la forza sia attrattiva?
Risultato: p=0.55 coulomb m

Esercizio 1.7

Secondo il modello di Bohr nell'atomo di idrogeno non eccitato l'elettrone (carica –e=-1.6 10^{-19} coulomb, massa m_e=9.1 10^{-31} kg) descrive attorno al nucleo (carica +e=1.6 10^{-19} coulomb, massa m_e=1.67 10^{-27} kg) un orbita circolare di raggio r=5.3 10^{-11} m.
Nell'ipotesi che la massa sia indipendente dalla velocità determinare:

1) La forza di attrazione F che si esercita tra il nucleo e l'elettrone.
2) La velocità v dell'elettrone.
3) La frequenza í di rivoluzione dell'elettrone.
4) L'energia totale U dell'elettrone.

Risultato: F=3.6 10^{-47} newton , v= 2.2 10^{6} m/sec, í=6.5 10^{15} giri/sec, U= -13.7 eV

Esercizio 1.8

Un dipolo elettrico è costituito da due cariche opposte di modulo Q= 10^{-6} coulomb poste fra loro a distanza d=2 cm. Esso è immerso in un campo elettrico uniforme di intensità 10^{5} newton/coulomb. Determinare:

1) Il valore massimo del momento meccanico M che si esercita sul dipolo.
2) Il lavoro U che bisogna compiere per ruotare il dipolo di 180 º attorno al suo baricentro partendo dalla posizione di equilibrio.

Risultato: M=2.3 newton metro, U= 4 10^{-3} joule

Esercizio 1.9

Si abbiano due sferette conduttrici uguali, l'una A fissa e l'altra B mobile, di massa m=2.3 grammi, sospese nel vuoto mediante fili di lunghezza l=12 cm a un punto O. Inizialmente le due sferette si toccano. Se si porta su ciascuna sferetta la carica q, la sferetta B si allontana da A e nella nuova posizione di equilibrio il filo di sospensione di b forma un angolo á= 60 º con quello di A.
Calcolare il valore della carica q.

Risultato: q=1.8 10^{-8} coulomb

Esercizio 1.10

Un pendolo è costituito da un filo sottile di massa trascurabile di lunghezza l=0.9 metri al cui estremo libero è attaccata una sferetta di materiale conduttore di massa m=5 10^{-4} Kg. Si immagini di caricare la sferetta con una carica positiva q=10^{-7} coulomb e di fare oscillare il pendolo, nel vuoto, in un campo elettrico uniforme E diretto secondo la verticale; in un primo tempo il verso del campo elettrico sia dall'alto verso il basso ed in un secondo momento dal basso verso l'alto. Nel primo caso la durata di 50 piccole oscillazioni complete è di 86 secondi, mentre nel secondo caso è di 107 secondi. Calcolare l'equazione differenziale che descrive il moto del pendolo e integrarla. Calcolare l'intensità del campo elettrico E.

Risultato: E=1.06 10^4 volt/m