SOLUZIONI

PROBLEMA N. 1

I dati del problema sono i seguenti:
θ_i = 20 °C (temperatura iniziale dell'aria)
θ_i = 50 °C (temperatura finale dell'aria)
p_i = 2.2 bar
p_f. = ?

Il processo è approssimabile con una trasformazione a *volume* costante, e l'aria può essere considerata un *gas perfetto biatomico* (il fatto che lo si assuma biatomico è giustificato dal fatto che l'aria è composta per la maggior parte di azoto (N_2) ed ossigeno (O_2)). Pertanto, si assumerà che il calore specifico molare a volume costante dell'aria sia uguale a $\frac{5}{2}$ R.
Fatte queste premesse, si può scrivere l'equazione di stato dei gas perfetti:

(1) $$pV = nRT$$

In questo caso però V è considerato costante, ed n (numero di moli) lo è certamente, a patto che il pneumatico non perda. Perciò la (1) può essere riscritta nel modo seguente:

(2) $$\frac{p}{T} = \frac{nR}{V} = \text{costante}$$

Per determinare la pressione finale, incognita, si fa uso dell'equazione

(3) $$\frac{p_i}{T_i} = \frac{p_f}{T_f}$$

nella quale la temperatura va espressa in Kelvin e non in gradi Celsius, per cui occorre convertire:

$$q_i = 20°C \rightarrow T_i = q_i + 273.15 \cong 293$$
$$q_f = 50°C \rightarrow T_f = q_f + 273.15 \cong 323$$

La pressione può essere mantenuta in bar (in questo modo anche pi sarà espressa in bar); si ottiene pertanto

(4) $$p_f = 2.2\,bar\,\frac{323\,K}{293\,K} \approx 2.4\,bar$$

Per calcolare la variazione di energia interna per mole dell'aria è sufficiente ricordare che, nell'approssimazione di gas perfetto, vale l'equazione

(5) $$dU = nc_v dT$$

Poiché n= 1 mol e c_v = $\frac{5}{2}$ R = 20.8 J/mol K, si ottiene

(6) $$\Delta U = 1\,mol\,20.8\frac{J}{mol\,K}\,30\,K = 624\,J$$

Si noti che, poiché la temperatura aumenta, anche l'energia interna U aumenta (infatti $\Delta U > 0$).

PROBLEMA N. 2

I dati sono:
q_i = 1300 °C (temperatura iniziale dell’acciaio)
q_f= 20 °C (temperatura iniziale dell’acqua)
m =1 kg massa dell’oggetto d’acciaio
M = 100 kg massa de11’acqua
$C_{acciaio}$= 447 J / kg-K
C_{acqua}= 4186 J / kg-K

Si tratta di un tipico problema di scambio di energia termica L’energia ceduta dall’oggetto è data da

(1) $$E_1 = m\, c_{acciaio} \left(q_i - q_f \right)$$

L’energia assorbita dall’acqua è data da

(2) $$E_2 = N\, c_{acqua} \left(q_f - q'_i \right)$$

Per la conservazione dell’energia, 1’energia ceduta dall’oggetto deve essere uguale all’energia assorbita dall’acqua, cioè

(3) $$E_1 = E_2$$

ossia

$$m\, c_{acciaio} \left(q_i - q_f \right) = N\, c_{acqua} \left(q_f - q'_i \right)$$

Si noti che in questa espressione si può mantenere la temperatura espressa in gradi Celsius, perché compaiono solo *differenze* che sono invarianti per cambiamento dell’origine delle temperature.
Quindi

$$\begin{aligned}
& m\, c_{acciaio} q_i - m\, c_{acciaio} q_f = N\, c_{acqua} q_f - N\, c_{acqua} q'_i \\
& q_f \left(N\, c_{acqua} + m\, c_{acciaio} \right) = N\, c_{acqua} q'_i + m\, c_{acciaio} q_i \\
& q_f = \frac{N\, c_{acqua} q'_i + m\, c_{acciaio} q_i}{N\, c_{acqua} + m\, c_{acciaio}}
\end{aligned}$$

Anche in questa espressione, se si vuole, si può mantenere la temperatura espressa in gradi Celsius, ottenendo così

$$q_f = 21.36\,°C$$

che espressa in Kelvin, diventa

$$T_f = q_f + 273.15 = 294.51\,K$$

Per calcolare la variazione di entropia del sistema occorre calcolare separatamente la variazione di entropia dell’acqua e dell’oggetto d’acciaio, e poi sommare i due contributi. E’ chiaro che il processo reale è irreversibile, ma la variazione di entropia deve essere calcolata lungo un qualunque processo reversibile che colleghi gli stessi stati iniziale e finale. Pertanto ci si “inventa” uno scambio di calore molto lento (quasistatico) tale che in ogni istante la temperatura del sistema sia definita. In tal modo si può dire che la variazione di entropia dell’oggetto e data da

(4) $$\Delta S_1 = \int_{T_i}^{T_f} \frac{dQ}{T} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{m\, c_{acciaio}\, dT}{T} = m\, c_{acciaio} \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = m\, c_{acciaio} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$$

Si noti che le temperature che compaiono nella (4) sono temperature assolute e devono essere espresse in Kelvin (questo è il motivo per cui si e scritto T e non θ). Infatti il rapporto tra temperature *non* è invariante per cambiamento dell'origine. Inoltre, poiché $T_f < T_i$, 1'argomento del logaritmo è minore di 1 ed il logaritmo è negativo: perciò l'entropia dell'oggetto *diminuisce.*
Convertendo le temperature

$$T_f = q_f + 273.15 = 294.51 K$$
$$T_i' = q_i' + 273.15 = 293.15 K$$
$$T_i = q_i + 273.15 = 1573.15 K$$

ed inserendo i valori numerici nella (4), si ottiene

$$\Delta S_1 = 1 kg\, 447 \frac{J}{kg\, K} \ln\left(\frac{294.51 K}{1573.15 K}\right) = -749 \frac{J}{K}$$

La variazione di entropia dell'acqua si calcola nello stesso modo:

(5) $$\Delta S_2 = N\, c_{acqua} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = 100 kg\, 4186 \frac{J}{kg\, K} \ln\left(\frac{294.51 K}{293.15 K}\right) = 1938 \frac{J}{K}$$

Infine, la variazione di entropia totale del sistema sarà data dalla somma tra ΔS_1 e ΔS_2 .

(6) $$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = (1938 - 749) \frac{J}{K} = 1189 \frac{J}{K}$$

Come si vede, è come ci si aspetta in virtù del II principio della termodinamica, la variazione di entropia del sistema è positiva (cioè 1'entropia del sistema è aumentata). Si noti che, a differenza dell'energia, che è conservata, 1'entropia è aumentata perché vi è stata creazione di entropia all'interno del sistema.

PROBLEMA N. 3

I dati in nostro possesso sono i seguenti:

M = 2.9 10^3	massa del maglio
m = 0.5 10^3	massa del palo
h=2m	altezza da cui cade il maglio
d=4cm=0.04m	profondità a cui arriva il palo

Nella situazione iniziale il maglio si trova ad altezza h al di sopra della sommità del palo, e quindi rispetto a tale punto ha un'energia gravitazionale data da

(1) $$E^i_{grav} = M\, g\, h$$

avendo posto lo zero dell'energia gravitazionale in corrispondenza della sommità del palo.

Immediatamente prima dell'urto, 1'energia del maglio è solo cinetica; per la conservazione dell'energia, si può dire che

(2) $$Mgh = \frac{1}{2} M v^2 \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2gh}$$

essendo v la velocità del maglio immediatamente prima dell'urto.
Non si danno informazioni sulla natura dell'urto. Tuttavia è ragionevole, se si pensa al caso reale, assumere che esso sia completamente dissipativo (e che quindi il maglio non rimbalzi ma rimanga a contatto con il palo mentre questo si pianta nel terreno). Dalla conservazione della quantità di moto si ha pertanto

(3) $$Mv = (M + m)v'$$

In virtù della (3), la quantità di moto del sistema è costante, e volendola calcolare si può scegliere per essa l'espressione più semplice:

(4) $$q = M\, v = M\, \sqrt{2gh} = 2.910^3\, kg \sqrt{2 \cdot 9.8 \, {}^{m}\!/_{s^2} \cdot 2m} = 1.8\ 10^4 kg \, {}^{m}\!/_{s}$$

Dalla (3) si può inoltre calcolare la velocità del sistema maglio + palo dopo l'urto:

(5) $$v' = \frac{M}{(M + m)} \sqrt{2gh}$$

Per calcolare la forza di reazione esercitata dal terreno sul palo, supponendola costante, si fa uso della conservazione dell'energia, considerando come istante iniziale quello immediatamente *dopo* 1'urto e come istante finale quello in cui il palo si arresta dopo essere penetrato nel terreno per 4 cm. Usando un modello in cui tutta 1'energia cinetica del sistema è dissipata in lavoro di penetrazione del palo, si ottiene che

(6) $$\begin{aligned} E_{cin}^{i} &= F_R\, d \\ \frac{1}{2}(M + m)v'^2 &= F_R d \\ \frac{1}{2}(M + m)\frac{M^2}{(M + m)^2} 2gh &= F_R d \\ F_R &= \frac{M^2}{(M + m)}\, g\, \frac{h}{d} \end{aligned}$$

avendo indicato con F_R la resistenza del terreno. Si noti che operando in questo modo si trascura però l'ulteriore perdita di energia gravitazionale dovuta all'abbassamento di un tratto d di tutto il sistema maglio + palo; tale energia dovrà essere fornita al maglio quando lo si solleverà per il prossimo colpo. Se si vuole valutare F_R tenendo conto di questo contributo, si ha

$$E_{cin}^{i}+E_{grav}^{i}=F_R' d$$
$$\frac{1}{2}(M+m)v'^2+(M+m)gd=F_R'd$$
$$F_R'=\frac{M^2}{(M+m)}g\frac{h}{d}\left(1+\frac{M^2}{(M+m)^2}\frac{d}{h}\right)$$
$$F_R'=F_R\left(1+\frac{M^2}{(M+m)^2}\frac{d}{h}\right)$$

Ora, pero, siccome m «M, si può dire che

$$\frac{M^2}{(M+m)^2}\approx 1$$

e quindi il termine aggiuntivo è dell'ordine di d/h, cioè, in percentuale, pari a

$$\frac{d}{h}100=\frac{4\cdot 10^{-2}\,m}{2\,m}\approx 2\%$$

PROBLEMA N. 4

Il problema si risolve facendo uso della costanza della quantità di moto angolare. Infatti il sistema in questione (1'atleta sui pattini) può essere considerato quasi isolato, almeno per quanto riguarda lo scambio di quantità di moto angolare verticale. I dati di cui siamo in possesso sono i seguenti:
ω_i= 5O giri/min
I_i= 1.72 kg m^2
ω_f= ?
I_f= 0.61 kg m^2
Dalla II legge di Newton scritta in forma rotazionale

(1) $$\sum \vec{M}_{ext}=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

si ottiene che, poiché il primo membro è zero, L è costante. Ma nel nostro caso

(2) $$L=Iw$$

e quindi la costanza di L porta alla condizione

(3) $$I_i w_i = I_f w_f$$

che permette di ricavare immediatamente ω_f espressa in giri al minuto:

$$w_f=w_i\frac{I_i}{I_f}=50\,{}^{giri}\!/_{\min}\frac{1.72}{0.61}=141\,{}^{giri}\!/_{\min}$$

E' utile per il seguito convertire ω_f ed ω_i in rad/s (o meglio ancora in s^{-1}):

(4) $$w_i = 50\,\tfrac{giri}{\min} = \frac{50 \cdot 2p\ rad}{60\,s} = 5.23\,s^{-1}; \qquad w_f = 14.76\,s^{-1}$$

Si può calcolare adesso la variazione di energia cinetica:

(5) $$\Delta E_{cin} = E^f_{cin} - E^i_{cin} = \frac{1}{2} I_f w_f^2 - \frac{1}{2} I_i w_i^2$$

Poiché $\Delta E_{cin} > 0$, c'è stato un aumento di energia cinetica.

PROBLEMA N. *5*

Non ci sono dati, ma si chiede di calcolare la minima velocità che è necessario imprimere al secchio nel punto più basso della sua traiettoria per far si che l'acqua non esca quando esso è capovolto, in funzione del parametro R (raggio della circonferenza descritta dal secchio). Si applichi la II legge di Newton al secchio nel momento in cui esso e capovolto. Nella situazione limite che si chiede di analizzare, la forza centripeta è data dal peso del secchio, per cui

(1) $$mg = ma_c \quad \rightarrow \quad \cancel{m}g = \cancel{m}\frac{v^2}{R}$$

da cui si ricava

(2) $$v = \sqrt{gR}$$

essendo v la velocità minima del secchio nel punto più alto. Per calcolare la velocità minima del secchio nel punto più basso, v', si può applicare la conservazione dell'energia: L'energia nel punto più alto è infatti

(3) $$E_1 = mg \cdot 2R + \frac{1}{2}mv^2$$

mentre l'energia nel punto più basso

(4) $$E_2 = \frac{1}{2}mv'^2$$

Pertanto, essendo $E_1 = E_2$ (il sistema e conservativo), si ottiene che

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v'^2 = \cancel{m}g \cdot 2R + \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$
$$v'^2 = 4gR + v^2 = 4gR + gR = 5gR$$
$$v' = \sqrt{5gR}$$