POLITECNICO DI TORINO
DIPLOMI UNIVERSITARI TELEDIDATTICI

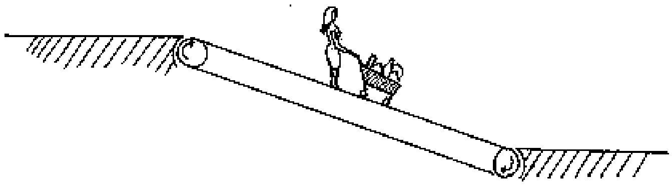
Esame di Fisica I

23/09/98

1. Una rampa mobile di un supermercato che trascina persone e carrelli al parcheggio sotterraneo si muove a velocità costante. Stimare questa velocità scegliendo tra le seguenti possibilità:

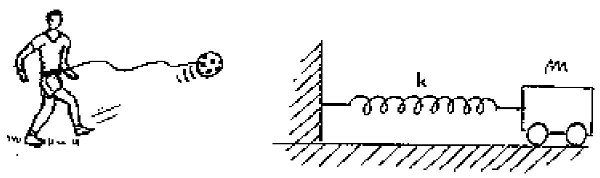
   0.1 m/s   1 m/s   10 m/s.

   Calcolare la potenza per unità di massa trasportata sapendo che l'inclinazione della rampa è 12°. Valutare inoltre il valore del minimo coefficiente di attrito necessario per impedire lo scivolamento della massa trasportata.



2. La Luna gira attorno alla Terra compiendo 1 giro ogni 27.3 giorni. Calcolare il valore dell'accelerazione, tenendo conto che la distanza Terra-Luna è di $3.8 \cdot 10^5$ km. Valutare il raggio terrestre usando l'intuizione di Newton circa la proporzionalità tra le accelerazioni e i quadrati delle distanze.

3. Un sistema di auto-allenamento per il gioco del calcio consiste nel tenere il pallone legato alla persona per mezzo di un elastico. Usando il modello fisico del sistema rappresentato in figura, a partire dall'energia E fornita al pallone, calcolare la quantità di moto acquistata dal pallone, il massimo allungamento dell'elastico, e la frequenza naturale di oscillazione.



4. Il volume di ogni cilindro di un motore a scoppio diminuisce, in fase di compressione, di un fattore 8 (detto *rapporto di compressione*). Calcolare l'energia per mole necessaria al processo di compressione, in un modello di trasformazione in cui la pressione rimane costante e la temperatura iniziale del gas è stimata in 1000 K.

5. Per preparare del tè freddo si versano in 520 g di tè alla temperatura di circa 100°C 40 cubetti di ghiaccio alla temperatura di 0°C. Stimando la massa dei cubetti e trascurando la differenza fra tè ed acqua, valutare la temperatura finale del tè. Si tenga conto che per far fondere 1 kg di ghiaccio a 0°C sono necessari $3.33 \cdot 10^5$ J (*calore latente di fusione*).

SOLUZIONI

PROBLEMA N. 1

La velocità della rampa può essere scelta uguale a 0.1 m/s oppure uguale a 1m/s. Probabilmente il valore effettivo è intermedio. Si supponga di scegliere v=0.1 m/s, facendo una stima per difetto. In tal caso i dati sono i seguenti:

$v = 0.1$ m/s

$\alpha = 12°$

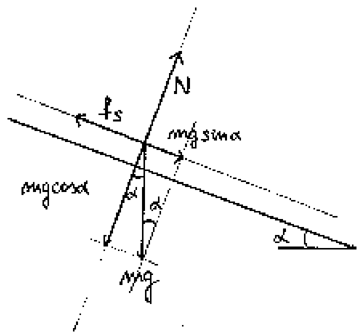
Per calcolare la potenza erogata per unità di massa trasportata si può procedere nel modo seguente. Indicando la potenza con P, si fa uso della relazione

(1) $P=\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$

che si può usare perché la forza è costante. **F** e **v** sono vettori, ed il loro prodotto scalare può essere scritto nella forma

(2) $P = F_p\cdot v$

dove si è indicato con F_p la componente parallela alla velocità della forza esercitata dal motore della rampa sulla massa trasportata. Se si costruisce il diagramma di corpo libero con tutte le forze che intervengono, come in figura:



si vede che la componente della forza esercitata dalla rampa sulla massa m parallela alla velocità è la forza d'attrito statico, ossia

(3) $F_p = f_s$.

Poiché la massa trasportata si muove di moto rettilineo uniforme, dev'essere $\Sigma\mathbf{F} = 0$. Questa relazione implica che, nella direzione parallela alla rampa, sia

(4) $f_s = mg \sin\alpha$

e pertanto si ottiene che, supponendo che m sia la massa trasportata, la potenza erogata dal motore è

(5) $P = m\, g \sin\alpha\, v$

e pertanto la potenza erogata per unità di massa trasportata è data da

(6) $P' = P/m = g\, v \sin\alpha = 9.8\ \text{m/s}^2 \cdot 0.1\ \text{m/s} \cdot \text{tg}(12°) =$

$= 9.8 \cdot 0.1 \cdot 0.2 \approx 0.2$ W/kg

Per calcolare il valore minimo del coefficiente di attrito statico che evita lo scivolamento della massa è sufficiente notare che la (4) può essere scritta tenendo conto della relazione tra f_s e forza normale:

(7) $f_s = \mu_s N = \mu_S\, mg \cos\alpha$

Sostituendo questa relazione nella (4), si ottiene

(8) $mg \sin\alpha = \mu_S\, mg \cos\alpha$

da cui si ricava che, indipendentemente dalla massa trasportata,

(9) $\mu_s = tg\alpha \approx 0.2$

PROBLEMA N. 2

I dati sono i seguenti:

$T = 27.3$ giorni (periodo della rotazione della Luna attorno alla Terra)

$d_{TL} = 3.8 \cdot 10^5$ km (distanza Terra-Luna)

Per calcolare l'accelerazione della Luna, occorre ricordare che essa si muove a velocità costante e l'unica accelerazione di cui risente è quella centripeta, visto che percorre un'orbita approssimativamente circolare. Pertanto

(1) $a = v^2/d_{TL} = \omega^2 d_{TL}$

dove si è fatto uso della ben nota relazione $v = \omega\, d_{TL}$.

La velocità angolare ω può essere ricavata a partire dal periodo, tenendo conto che

(2) $T = 1/\nu$

essendo ν la frequenza, legata alla velocità angolare da

(3) $\nu = \omega/2\pi$.

Infine, quindi, si ha che

(4) $\omega = 2\pi/T$.

L'accelerazione diventa perciò

(5) $$a = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 d_{TL}$$

Prima di mettere i valori numerici occorre convertire il periodo in secondi:

(6) $T = 27{,}3 \cdot 24 \cdot 3600$ s

Infine si ottiene

(7) $a \approx 2.7 \cdot 10^{-3}\ m/s^2$

Per valutare il raggio terrestre, è sufficiente ricordare la legge di gravitazione universale, che applicata alla Luna diventa:

(8) $$F = \frac{GM_T m_L}{d_{TL}^2}$$

L'accelerazione della Luna è data allora da

(9) $$a = \frac{F}{m} = \frac{GM_T}{d_{TL}^2}$$

e naturalmente sarebbe la stessa per qualsiasi corpo alla stessa distanza dalla Terra. Come si vede, l'accelerazione di un corpo qualsiasi è proporzionale all'inverso del quadrato della sua distanza dalla Terra (o meglio, dal centro della Terra). Un corpo che si trova sulla superficie terrestre è a distanza dal centro della Terra uguale al raggio della Terra stessa; ed in tal caso la sua accelerazione è nota perché è g. Perciò si possono scrivere le due relazioni

(10) $$a = \frac{GM_T}{d^2_{TL}} \qquad g = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

Facendo il rapporto tra le due, si ottiene che

(11) $$a / g = \frac{R^2_T}{d^2_{TL}}$$

da cui si ricava

(12) $$R_T^2 = \frac{a}{g} d^2_{TL} \text{ ossia}$$

(13) $$R_T = \sqrt{\frac{a}{g}} d_{TL}$$

Inserendo i valori di a, di g e della distanza Terra-Luna, si arriva a

(14) $$R_T \approx 6300 \text{ km}$$

che è una buona stima del valore del raggio terrestre (il raggio medio, calcolato come se la Terra fosse una sfera perfetta, è pari a 6371,221 km)

PROBLEMA N. 3

L'unico dato è l'energia totale E fornita al pallone. Questa deve essere interpretata in realtà come energia meccanica totale del sistema elastico + pallone:

(1) $$E = E_{cinetica} + E_{potenziale}$$

Poiché il pallone non è un sistema isolato, la sua quantità di moto non è costante; quello che quindi si può calcolare è il suo valore massimo, che si ottiene quando l'energia potenziale elastica è nulla (ossia, con riferimento al modello molla-massa, quando l'allungamento della molla è nullo). Perciò, indicando con p la quantità di moto massima, si ha

(2) $$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

da cui

(3) $$p = \sqrt{2mE}$$

Il massimo allungamento dell'elastico si ha quando tutta l'energia del sistema è energia potenziale elastica, ossia quando

(4) $$E = \frac{1}{2} k\, x^2$$

da cui si ricava l'allungamento massimo x:

(5) $$x = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

La pulsazione del moto armonico del pallone (nel modello scelto per il sistema) è data da:

(6) $$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

per cui la frequenza ν del moto risulta essere

(7) $$\nu = \frac{1}{2\pi}\omega = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

PROBLEMA N. 4

I dati sono i seguenti:

$$\frac{V_i}{V_f} = 8$$

p = costante

T ≈ 1000 K

Si deve calcolare l'energia necessaria per la compressione, ossia il lavoro richiesto per diminuire il volume del gas mantenendo costante la pressione. Tale lavoro ha espressione

(1) $$E = -\int_i^f p\,dV = -p\int_i^f dV = -p\left(V_f - V_i\right)$$

ove il segno – è dovuto al fatto che il lavoro è fatto dall'esterno sul sistema.

Poiché la pressione non è nota, occorre far uso dell'equazione di stato dei gas perfetti:

(2) $$p_i V_i = nRT_i$$

da cui si ottiene che

(3) $$p_i = \frac{nRT_i}{V_i} = p$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che la pressione è costante. Sostituendo nella (1) si ha quindi che

(4) $$E = -\frac{nRT_i}{V_i}(V_f - V_i)$$

ossia

(5) $$E = -nRT_i\left(\frac{V_f}{V_i} - 1\right)$$

Il numero di moli n non è noto, ma il problema chiede di calcolare l'energia *per mole*, che vale

(6) $$E = -RT_i\left(\frac{V_f}{V_i}-1\right) = -8.31\,\frac{J}{mol\cdot K}\cdot 1000\ K\cdot(0.125 - 1) =$$

$$= 7271.25\ J/mol \approx 7.2\cdot 10^3\ J/mol$$

In realtà il modello usato per il calcolo non è un "buon" modello, nel senso che il processo di compressione in un motore a scoppio non avviene a pressione costante. Piuttosto, può essere trattato come una trasformazione adiabatica con ottima approssimazione (infatti è così rapido che praticamente il gas non scambia calore con l'esterno). Pertanto il primo principio della termodinamica

(7) $$\Delta U = Q - W$$

si riduce a

(8) $$\Delta U = -W$$

che ci dice che l'energia immessa nel sistema sotto forma di lavoro si trasforma in energia interna del gas. Pertanto si può scrivere che

(9) $$\Delta U = -\int_i^f p\,dV$$

è la variazione di energia interna del gas (supposto perfetto) contenuto nel cilindro. Per calcolare l'integrale è necessario tenere conto che, in una trasformazione adiabatica,

(10) $$pV^\gamma = \text{costante}$$

dove γ è il rapporto tra il calore specifico a volume costante ed il calore specifico a pressione costante:

(11) $$\gamma = \frac{c_V}{c_p}$$

Sebbene γ non sia nota, possiamo fare una stima grossolana usando il valore che essa assume nel caso di un gas biatomico (in pratica si considera solo l'aria, che è una miscela di gas perfetti biatomici, e non la benzina!). Prenderemo pertanto

(12) $$\gamma = 7/5$$

Dalla (10) consegue che

(13) $$p_iV_i^\gamma = pV^\gamma$$

da cui

(14) $$p = p_i\frac{V_i^\gamma}{V^\gamma}$$

Sostituendo la (14) nell'integrale, si ottiene

(15) $$\Delta U = -p_iV_i^\gamma\int_i^f \frac{dV}{V^\gamma}$$

Tuttavia, p_i non è nota ed è pertanto opportuno far comparire l'unica variabile di stato conosciuta, ossia T_i, che è legata a p_i e V_i dall'equazione di stato, da cui si ottiene che

(16) $$p_i = \frac{nRT_i}{V_i}$$

e, sostituendo nella (15), si perviene finalmente a

(17) $$\Delta U = -\ nRT_i \cdot V_i^{\gamma-1} \int_i^f \frac{dV}{V^{\gamma}}$$

dove occorre ora calcolare l'integrale, che però si risolve facilmente ricordando l'integrale fondamentale

(18) $$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + \cos t$$

Si ottiene quindi dalla (17)

(19) $$\Delta U = -\ nRT_i \cdot V_i^{\gamma-1} \frac{1}{-\gamma+1}\left(V^{-\gamma+1}\right)_i^f$$

$$= -\frac{nRT_i}{1-\gamma} \cdot \frac{1}{V_i^{1-\gamma}} \cdot \left[V_f^{1-\gamma} - V_i^{1-\gamma}\right]$$

$$= \frac{nRT_i}{\gamma-1} \cdot \left[\left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{1-\gamma} - 1\right]$$

Per ottenere l'aumento di energia interna per mole è sufficiente dividere per n e si ottiene:

(20) $$\Delta U^* = \frac{\Delta U}{n} = \frac{8.31 \cdot J}{2/5 \cdot mol \cdot K} \cdot 1000 \cdot K \cdot \left[8^{\frac{2}{5}} - 1\right] = 26\,953 \text{ J/mol} \approx 2.7 \cdot 10^4 \text{ J/mol}$$

Si ricordi ora che ΔU^* è uguale al lavoro di compressione per mole: come si vede, il lavoro necessario per la compressione nel caso adiabatico è considerevolmente maggiore rispetto al caso isobaro: infatti l'area sottesa all'isobara in un diagramma p-V è minore di quella sottesa all'adiabatica.

PROBLEMA N. 5

I dati sono i seguenti:

$M = 520$ g	(massa di tè)
$T_i = 373$ K	(temperatura iniziale del tè)
$n = 40$	(numero di cubetti di ghiaccio)
$T_0 = 273$ K	(temperatura del ghiaccio)
$L = 3.33 \cdot 10^5$ J/kg	(calore latente di fusione del ghiaccio)

Occorre innanzi tutto dare una stima della massa dei cubetti di ghiaccio. Come sempre in questi casi, conviene stimare il volume, e poi moltiplicarlo per la densità. Una stima ragionevole è quella che si ottiene assumendo che i cubetti siano effettivamente cubi di lato 2 cm, per esempio. In questo caso il volume è 8 cm^3 e per ottenere la massa basta moltiplicare per la densità del ghiaccio. Sebbene quest'ultima non sia uguale a 1g/cm^3 ma minore (altrimenti il ghiaccio non galleggerebbe), possiamo usare questo valore perché stiamo facendo soltanto una stima. Perciò massa di 1 cubetto ≈ 8 g

massa totale del ghiaccio = m ≈ 320 g

Quando il ghiaccio viene messo nel tè bollente (che trattiamo come se fosse acqua) ovviamente fonde. A priori non siamo in grado di dire se tutto il ghiaccio fonda oppure no: ci conviene però ragionare come se tutto il ghiaccio fondesse: se la temperatura di equilibrio finale che si ottiene in questo modo è minore di 0°C, vuol dire che c'è ancora del ghiaccio residuo ed occorre fare una correzione.

Supponiamo dunque che tutti i cubetti di ghiaccio fondano interamente: l'energia assorbita dal ghiaccio sarà uguale al calore di fusione

(1) $$E_1 = m \cdot L$$

L'acqua in cui si è trasformato il ghiaccio si trova inizialmente alla temperatura di 273 K e per giungere alla temperatura finale di equilibrio della miscela, che indicheremo con T_f , deve ancora assorbire un'energia data da

(2) $$E_2 = m \cdot c \cdot (T_f - T_0)$$

dove c è il calore specifico dell'acqua, che non è dato perché si suppone noto:

(3) $$c = 1 \ \frac{\text{Cal}}{\text{kg} \cdot \text{K}} = 4186 \ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Il tè che si trova inizialmente alla temperatura T_i cede un'energia pari a

(4) $$E_3 = M \cdot c \cdot (T_i - T_f)$$

La conservazione dell'energia impone che l'energia ceduta da una parte del sistema sia uguale all'energia assorbita dall'altra parte, e quindi

(5) $$E_1 + E_2 = E_3$$

cioè

(6) $$m \cdot L + m \cdot c \cdot (T_f - T_0) = M \cdot c \cdot (T_i - T_f)$$

e, raccogliendo T_f:

(7) $$(m \cdot c + M \cdot c) \cdot T_f = M \cdot c \cdot T_i + m \cdot c \cdot T_0 - m \cdot L$$

da cui

(8) $$T_f = \frac{M \cdot c \cdot T_i + m \cdot c \cdot T_0 - m \cdot L}{(m + M) \cdot c}$$

ed inserendo i valori numerici si ottiene

(9) $$T_f \approx 304 \text{ K} = 31°\text{C}.$$