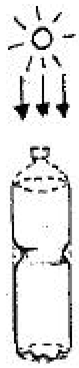
POLITECNICO DI TORINO
DIPLOMI UNIVERSITARI TELEDIDATTICI

Esame di Fisica I

21/10/98

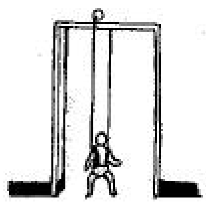
1. Un lago alpino, a quota 2560 m, ha una superficie di circa 25 000 m^2. Durante l'inverno esso è coperto da uno strato di ghiaccio dello spessore di circa mezzo metro. Calcolare la variazione di entropia del lago provocata dalla fusione del ghiaccio, nella stagione estiva. Si tenga conto che per fondere 1 kg di ghiaccio a 0°C sono necessari $3.33 \cdot 10^5$ J (*calore latente di fusione*) e che la densità del ghiaccio è $0.917 \cdot 10^3$ kg/m^3.

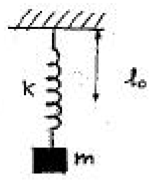
2. Una comune bottiglia di plastica trasparente da 1.5 litri viene svuotata, tappata e lasciata per un'ora al sole. Si supponga che, tranne che per il calore che riceve dal sole, la bottiglia sia isolata. (Questa ipotesi non è realistica e di conseguenza il risultato sarà paradossale). Facendo riferimento alla figura e considerando cilindrica la bottiglia, stimare la superficie irradiata, e quindi calcolare l'aumento di temperatura dell'aria in essa contenuta. La potenza irradiata dal Sole è di 1.3 kW/m^2 (*costante* solare) e per far aumentare di 1K la temperatura di 1m^3 d'aria sono necessari $8.4 \cdot 10^2$ J.



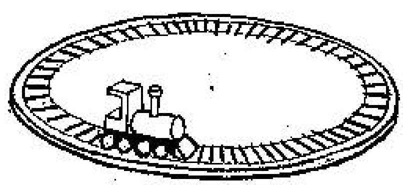
3. E' grazie alla resistenza dell'aria che le gocce di pioggia, durante i temporali, non sono proiettili mortali. Valutare la quantità di moto che avrebbe una goccia di pioggia se cadesse nel vuoto, stimando la massa della goccia ed assumendo l'altezza della nube pari a 5000 m. Si confronti il valore ottenuto con quello di un proiettile d'arma da fuoco, che è circa 2 kg· m/s.

4. Un tipo di altalena adatto a bambini piccoli è costituito da un'imbracatura sospesa tramite elastici che si possono agganciare, per esempio, al bordo superiore di una porta. Calcolare la relazione tra la lunghezza (regolabile) degli elastici a riposo (l_0) e l'altezza *h* alla quale occorre agganciare l'imbracatura per far sì che il bambino tocchi terra nel punto di equilibrio. Si usi per il sistema il modello mostrato in figura.





5. Per dimostrare agli allievi la costanza del momento angolare in un sistema isolato, un insegnante pensa di montare la rotaia circolare del trenino elettrico dei figli su una piattaforma girevole porta-TV, anch'essa circolare, come in figura. Indicando con R il raggio della piattaforma e della rotaia, con m la massa del trenino, e con M la massa della piattaforma, calcolare di quale angolo ruota la piattaforma quando il treno compie un giro intero. (Il momento d'inerzia della piattaforma è I= 1/2 MR^2). Si valuti tale angolo dando una stima delle masse del trenino e della piattaforma.



SOLUZIONI

PROBLEMA N. 1

I dati sono i seguenti:

$S = 25000\ m^2$ superficie del lago

$d = 0.5\ m$ spessore del ghiaccio

$L = 3.33 \cdot 10^5\ J / kg$ calore latente di fusione

$\mu = 0.917 \cdot 10^3\ kg/m^3$ densità del ghiaccio

Si vuole saper qual è l'aumento di entropia dovuto alla *sola* fusione del ghiaccio, quindi si suppone di partire da uno stato in cui il ghiaccio è già a 0°C e di arrivare allo stato in cui non c'è più ghiaccio ma tutta l'acqua è ancora alla temperatura di 0°C. In questo modo, l'aumento di entropia è solo quello dovuto al cambiamento di fase.

Occorre innanzi tutto calcolare la massa di ghiaccio. Il volume è dato da

(1) $$V = S \cdot d$$

e quindi la massa è data da

(2) $$M = \mu\, S\, d$$

Ora sappiamo che

(3) $$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

e quindi in generale la variazione di entropia in una trasformazione finita si ottiene dall'integrale:

(4) $$\Delta S = \int_i^f \frac{\delta Q}{T}$$

Tuttavia nel nostro caso la trasformazione avviene a temperatura costante, per cui T può essere portato fuori dall'integrale, e quest'ultimo dà semplicemente il calore totale assorbito dal ghiaccio:

(5) $$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{M \cdot L}{T} = \frac{\mu S d \cdot L}{T} = \frac{0.917 \cdot 10^3\ \frac{kg}{m^3} \cdot 2.5 \cdot 10^4\, m^2 \cdot 0.5 m \cdot 3.33 \cdot 10^5\ \frac{J}{kg}}{273K} =$$

$$= 0.01398 \cdot 10^{12}\ J/K \approx 1.4 \cdot 10^{10}\ J/K$$

PROBLEMA N. 2

I dati sono:

$V = 1.5\ l$ volume della bottiglia

$w = 1.3\ kW/m^2$ costante solare

$c_V = 8.4 \cdot 10^2\ \frac{J}{m^3K}$ calore specifico dell'unità di volume (a volume costante)

Si noti innanzitutto che il calore specifico a volume costante dell'unità di volume in generale dipende fortemente dalla temperatura: infatti si può mostrare che vale la relazione

(1) $$c_V = \frac{n}{V} c_{mol}$$

dove si è indicato con c_{mol} il calore specifico *molare* a volume costante. Il fattore n/V è il numero di moli di gas per unità di volume, che dipende dalla temperatura, perché partendo dall'equazione di stato dei gas perfetti si ricava

(2) $$pV = nRT \Rightarrow \frac{n}{V} = \frac{p}{RT}$$

In questo problema tuttavia n/V è costante, perché la bottiglia è tappata (per cui n non cambia) ed il suo volume è costante. Ne consegue che, in questo caso, il calore specifico dell'unità di volume è ben definito ed assume il valore costante dato nel problema.

Per valutare la superficie irradiata si prenda come stima del diametro della bottiglia $d = 2r \approx 8$ cm. In questo modo

(3) $$S = \pi\ r^2 = 3.14 \cdot (4 \cdot 10^{-2})^2\ m^2 \approx 5 \cdot 10^{-3}\ m^2$$

L'energia assorbita dalla bottiglia (e quindi dall'aria in essa contenuta) durante il tempo $\Delta t = 1h = 3600$ s è data da:

(4) $$E = w \cdot S \cdot \Delta t = 1.3 \cdot 10^3\ \frac{J}{m^2 s} \cdot 5 \cdot 10^{-3}\ m^2 \cdot 3600\ s \approx 23400\ J$$

Questa energia, nell'ipotesi (assurda) che non vi siano altri scambi di calore con l'esterno, è anche uguale all'aumento di energia interna dell'aria contenuta nella bottiglia. Poiché si conosce il calore specifico dell'unità di volume, si può scrivere che

(5) $$E = \Delta U = c_V\ V\ \Delta T$$

ove naturalmente V è il volume dell'aria (1.5 litri) e ΔT il suo aumento di temperatura. Prima di calcolare ΔT dalla (5) occorre notare che il volume deve essere convertito in m^3, tenendo conto che 1 litro = 1 $dm^3 = 10^{-3}\ m^3$. Quindi

(6) $$\Delta T = \frac{E}{c_V V} = \frac{23400}{1.5 \cdot 10^{-3} \cdot 8.4 \cdot 10^2} \frac{J}{m^3 \cdot J/m^3K} \approx 18000\ K \quad !$$

E' evidente che il risultato, come annunciato nel testo del problema, è del tutto paradossale; tuttavia è utile per notare quanto grande sia l'effetto dello scambio termico tra la bottiglia e l'esterno nel determinare la vera temperatura dell'aria. Quello che accade in realtà è che si crea un equilibrio tra la corrente di energia entrante e quella uscente, che fa sì che, a meno di non variare le condizioni sperimentali, la temperatura dell'aria nella bottiglia rimanga costante. Sperimentalmente si trova che tale temperatura è un po' maggiore di quella dell'ambiente.

PROBLEMA N. 3

L'unico dato è l'altitudine a cui si origina la goccia:

h = 5000 m

Tale altezza può apparire eccessiva, ma si deve tenere conto che le nubi temporalesche (*cumulonembi*), si formano tra i 2000 e i 6000 metri d'altezza e, a differenza delle altre, hanno uno sviluppo verticale notevole, con spessori di alcuni chilometri.

Si deve allora stimare la massa della goccia. Come sempre, è meglio prima stimare le dimensioni e poi moltiplicare il volume per la densità dell'acqua, che è nota. Supponiamo per esempio che la goccia sia una sfera di raggio r = 0.5 cm. In tal caso il suo volume è

(1) $$V = 4/3\pi\, r^3 = 4/3 \cdot 3.14 \cdot 5^3 \cdot 10^{-3} = 5.23 \cdot 10^{-3}\, cm^3 \approx 0.5\, cm^3$$

e la sua massa

(2) $$m = \mu\, V = 1\ g/cm^3 \cdot 0.5\ cm^3 = 0.5\ g$$

Per conoscere la velocità della goccia quando arriva al suolo da un'altezza di 5000 m, usiamo la conservazione dell'energia nel sistema goccia-Terra:

(3) $$E = E_{potenziale} + E_{cinetica} = costante$$

Nell'istante iniziale l'energia è tutta potenziale (supponiamo che la goccia si a inizialmente ferma) e vale:

(4) $$E_i = m\, g\, h$$

Nell'istante finale (immediatamente prima che la goccia tocchi terra) tutta l'energia è diventata cinetica, e vale

(5) $$E_f = 1/2\, m\, v^2$$

Ponendo $E_i = E_f$, in accordo con la (3), si ottiene che

(6) $$m\, g\, h = 1/2\, m\, v^2$$

e si ricava la velocità

(7) $$v = \sqrt{2gh} \approx \sqrt{2 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 5 \cdot 10^3\, m} \approx 316\ m/s$$

avendo posto 9.8 ≈ 10. Per avere un'idea dell'enormità del valore di v, lo si converta in km/h (che è l'unità di misura della velocità cui siamo più abituati):

(8) $$v = 316 \text{ m/s} = \frac{316 \cdot 10^{-3}\text{km}}{\frac{1}{3600}\text{h}} = 1137.6 \,\text{km/h} \quad !!$$

Per ottenere infine la quantità di moto della goccia in queste condizioni, è sufficiente usare la relazione

(9) $$q = m \cdot v = 0.5 \text{ g} \cdot 316 \text{ m/s} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot 316 \text{ m/s} = 0.158 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

e si ottiene che essa è circa 1/12 della quantità di moto di un proiettile d'arma da fuoco.

Si noti quanto segue:

1. le gocce di pioggia durante un temporale possono avere dimensioni superiori a quelle da noi stimate, e quindi la loro quantità di moto, se cadessero nel vuoto, potrebbe essere ancora più grande di quella ora ottenuta.

2. in realtà le gocce si comportano come corpi immersi in un fluido, e sono pertanto sottoposte ad un attrito che si può ritenere con buona approssimazione proporzionale alla loro velocità. Questo fa sì che, dopo una prima fase di moto accelerato, esse arrivino presto ad una velocità limite e continuino la caduta a velocità costante. Tale velocità, nel caso di gocce di pioggia di 1.5 cm di raggio, vale 7 m/s ([1]).

PROBLEMA N. 4

Il problema chiede di calcolare la relazione tra la lunghezza degli elastici a riposo (l_0) e l'altezza *h* a cui occorre agganciare l'imbracatura per far sì che il bambino tocchi terra nel punto di equilibrio. Il sistema "bambino + imbracatura" può essere considerato un sistema oscillante formato da una molla (il cui estremo superiore è fisso) e da una massa m agganciata al suo estremo libero.

I dati sono i seguenti:

l_0 lunghezza a riposo degli elastici

k costante elastica

m massa del bambino

h altezza a cui si agganciano gli elastici

Come in tutti i problemi di dinamica, si costruisca il diagramma delle forze per la massa m: la massa risente della propria forza peso, diretta verso il basso, e di una forza di reazione elastica dovuta alla molla. La forza peso è, come noto

(1) $$\mathbf{P} = m \cdot \mathbf{g}$$

---

1. cfr. Halliday - Resnick - Krane, Fisica 1, Casa Editrice Ambrosiana (Milano) 4ª ed., pag. 121

mentre la forza elastica ha espressione

(2) $$\mathbf{F_{el}} = -\,k \cdot \mathbf{x}$$

essendo $\mathbf{x}$ l'allungamento (vettoriale) della molla. Si noti che $\mathbf{F_{el}}$ è diretta verso l'alto o verso il basso a seconda che la molla sia allungata o compressa.

La condizione di equilibrio si verifica quando la massa m non è sottoposta ad alcuna accelerazione, ossia quando le due forze citate hanno risultante nulla. In questa condizione ovviamente la forza di reazione elastica deve avere verso opposto a quello della forza peso, e la relazione tra i moduli delle due forze deve essere

(3) $$m \cdot g = k \cdot x$$

da cui si ottiene il valore dell'allungamento x:

(4) $$x = \frac{mg}{k}$$

Sapendo che gli elastici (o la molla, se ci si riferisce al modello) a riposo hanno lunghezza l_0, si ottiene che l'altezza h alla quale occorre agganciare l'imbracatura è legata ad l_0 ed alla massa m del bambino dalla relazione

(5) $$h = l_0 + \frac{mg}{k}$$

PROBLEMA N. 5

Le grandezze in gioco sono:

m massa del trenino

M massa della piattaforma

R raggio della piattaforma e della rotaia (supponiamo che coincidano)

$I = 1/2\ MR^2$ momento d'inerzia della piattaforma (nell'approssimazione di disco omogeneo)

Facciamo uso di un modello in cui il sistema treno + piattaforma è isolato: per fare ciò è necessario supporre trascurabili gli attriti tra la piattaforma ed il suo perno.

Poiché il sistema è isolato, dalla 2^a legge di Newton scritta in forma

(1) $$\Sigma\mathbf{M}_{ext} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

consegue che $\mathbf{L}$, ossia il momento angolare del sistema, è costante.

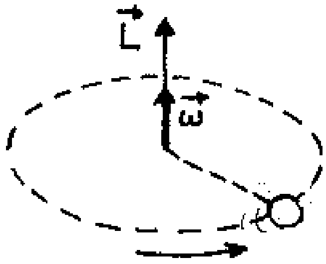
Si ricordi che la relazione

(2) $\mathbf{L} = I \cdot \boldsymbol{\omega}$

è valida in questa forma vettoriale soltanto in due casi:

a) per sistemi *simmetrici* rispetto all'asse di rotazione

b) per corpi puntiformi in rotazione attorno ad un asse, nel caso molto particolare in cui il polo rispetto a cui si calcola **L** sta sul piano della traiettoria:



mentre negli altri casi è vera solamente la relazione scalare:

(3) $L_z = I \cdot \omega$

perché il vettore $\boldsymbol{\omega}$ non è parallelo a **L**.

Ora, il nostro sistema è composto dalla piattaforma, che è simmetrica rispetto al suo asse di rotazione (caso a) e dal trenino che può essere considerato un punto materiale in moto rotatorio attorno allo stesso asse. Se si sceglie come polo (rispetto al quale si calcolano i momenti) il centro della piattaforma, si ricade nel caso b, per cui si conclude che, con questa scelta, per l'intero sistema "treno + piattaforma" vale la relazione (2) ed il momento angolare è parallelo alla velocità angolare.

Prima che il trenino sia messo in moto, il momento angolare del sistema, rispetto al sistema di riferimento del laboratorio, è certamente nullo perché non vi è rotazione:

(4) $\mathbf{L}_i = 0$

Quando il trenino si muove (supponiamo a velocità costante, in mancanza di precisazioni) il momento angolare totale è la somma di due contributi:

(5) $\mathbf{L} = \mathbf{L}_t + \mathbf{L}_p$

dovuti rispettivamente al treno ed alla piattaforma e che valgono:

(6) $\mathbf{L}_t = I_t\ \boldsymbol{\omega}_t \ \Rightarrow \ L_t = |\mathbf{L}_t| = mR^2\omega_t$

(7) $\mathbf{L}_p = I_p\ \boldsymbol{\omega}_p \ \Rightarrow \ L_p = |\mathbf{L}_p| = 1/2\ MR^2\omega_p$

La condizione **L** = costante implica che sia

(8) $\mathbf{L} = \mathbf{L}_i$

Poiché tutti i momenti in gioco hanno la stessa direzione, possiamo scrivere la (8) in modulo, ottenendo la relazione scalare

(9) $$mR^2\omega_t + 1/2\ MR^2\omega_p = 0$$

in cui, come è facile notare, il raggio scompare dopo la semplificazione. Da questa si può ricavare ω_p, ottenendo

(10) $$\omega_p = -2\frac{m}{M}\omega_t$$

Il segno – sta ad indicare che la piattaforma ruota in senso inverso rispetto al trenino. Per passare agli angoli basta osservare che le velocità angolari sono costanti, e quindi

(11) $$\omega_p = \Delta\theta_p / \Delta t \qquad\qquad \omega_t = \Delta\theta_t / \Delta t$$

Sostituendo le (11) nella (10) si arriva infine a

(12) $$\Delta\theta_p = -2\frac{m}{M}\Delta\theta_t$$

Nel tempo in cui il trenino descrive un angolo $\Delta\theta_t = 2\pi$, pertanto, la piattaforma ruota di un angolo

(13) $$\Delta\theta_p = -4\pi\ \frac{m}{M}\quad \text{(rad)}$$

Se si stimano le due masse, per esempio ponendo

$$m \approx 0.5\ \text{kg} \qquad\qquad M \approx 2\ \text{kg}$$

si ottiene che

$$\Delta\theta_p = -4\pi \cdot 0.5 / 2\ \ \text{rad} = \pi\ \text{rad}$$

ossia mentre il treno compie un giro completo, la piattaforma fa mezzo giro in senso inverso.