Parte IV
Indice

- Algebra booleana
  - operatori logici
  - espressioni logiche
  - teoremi fondamentali
  - tabelle di verità
  - forme canoniche
  - circuiti logici
  - mappe di Karnaugh
- Esercizi

Algebra booleana

- L’algebra booleana deve il suo nome a Boole che ne formalizzò le regole
- L’algebra booleana opera su variabili che possono assumere solamente due valori
- Tali variabili vengono dette “logiche” o “booleane”; i valori che possono assumere sono due:

  1/0, vero/falso, on/off, chiuso/aperto
- Il valore 1 è solitamente associato alla condizione logica *vero* (*true*, *on*, *chiuso*), mentre lo 0 è associato alla condizione logica *falso* (*false*, *off*, *aperto*)

Algebra booleana

- L’algebra booleana è adatta per rappresentare “*eventi binari*”, cioè condizioni che possono assumere solo due valori
  - Esempio
    Una lampadina può essere accesa (a questa condizione si associa il valore *1* o *vero*) oppure spenta (valore *0* o *falso*)
- Le funzioni che operano sulle variabili booleane sono dette funzioni booleane e possono produrre anch’esse solo i valori 0 e 1

Algebra booleana

- Una funzione booleana F, funzione di variabili booleane, $v_1,v_2,...,v_n$ si indica:

$$F(v_1,v_2,\ldots,v_n)$$

- Può essere definita in vari modi:
  – uno di questi consiste nello specificare i valori di F per tutte le possibili combinazioni delle variabili da cui essa dipende. Tale elenco di combinazioni viene detto *tabella della verità*

Algebra booleana

- Esempio
  $F(v1,v2,v3)$ può essere definita come:

v_3	v_2	v_1	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- Ogni variabile booleana può assumere due valori, quindi, con n variabili si possono avere 2^n possibili combinazioni

Algebra booleana

- Esempio
  Descrizione di un evento mediante una funzione booleana

  Un allievo passa l'esame se si verifica almeno una delle seguenti condizioni:

  » supera sia il compito di esonero sia la prova orale

  » non supera l'esonero, ma è sufficiente alla prova scritta di un appello regolare e supera la prova orale

  – Si può assegnare ad ogni evento una variabile booleana:

  $a \rightarrow$ esonero

  $b \rightarrow$ scritto regolare

  $c \rightarrow$ prova orale

Algebra booleana

- Con 3 variabili booleane ci sono 8 (2^3) possibili combinazioni
- La tabella della verità della funzione booleana “superamento esame” *S(a,b,c)* sarà:

a	*b*	*c*	*S*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Algebra booleana

- Si noti che per superare l’esame, cioè $S = 1$, bisogna aver sostenuto e superato l’orale e l’esonero e/o lo scritto regolare
- A stretto rigore di logica la condizione $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$ non può verificarsi, in quanto si può accedere all’orale solo dopo aver superato una delle prove precedenti (o entrambe)
- Il valore di S per quella combinazione si potrebbe più correttamente non specificare (valore detto *don’t care* e solitamente rappresentato con il simbolo “–”)

Operatori logici

- Le variabili booleane possono essere combinate da operatori logici
- Tali operatori restituiscono anch'essi un valore logico
- Gli operatori sono:
  - AND
  - OR
  - NOT
  - NAND
  - NOR
  - EXOR
  - EXNOR

Operatori logici

- **Operatore *AND***
  - tale operatore viene denotato dal simbolo • (da non confondere con il simbolo di prodotto aritmetico) e spesso sottinteso
  - si applica a due operandi e produce un valore in accordo alle seguenti regole:
    - » 0 • 0 = 0
    - » 0 • 1 = 0
    - » 1 • 0 = 0
    - » 1 • 1 = 1
  - il risultato è *vero* se <u>entrambi</u> gli operandi sono veri

Operatori logici

- **Operatore *OR*** *(inclusivo)*
  - tale operatore viene denotato dal simbolo + (da non confondere con il simbolo di addizione aritmetica)
  - si applica a due operandi e produce un valore in accordo alle seguenti regole:
    - » $0 + 0 = 0$
    - » $0 + 1 = 1$
    - » $1 + 0 = 1$
    - » $1 + 1 = 1$
  - il risultato è *vero* se <u>almeno uno</u> degli operandi è vero

Operatori logici

- **Operatore *NOT***
  - tale operatore viene indicato con il simbolo $\overline{}$ sopra la variabile da negare (es. $\overline{a}$)
  - si applica ad un solo operando (operatore unario) e produce un valore in accordo alle seguenti regole:
    » $\overline{0} = 1$
    » $\overline{1} = 0$
  - il risultato è il valore opposto (la negazione) di quello dell’operando; ovvero, se l’operando è falso l’uscita è vera e viceversa

Operatori logici

- **Operatore *NAND***
  - tale operatore è equivalente ad un operatore *AND* negato
    - » $A \text{ NAND } B = \overline{A \text{ AND } B}$
  - si applica a due operandi e produce un valore in accordo alle seguenti regole:
    - » 0 NAND 0 = 1
    - » 0 NAND 1 = 1
    - » 1 NAND 0 = 1
    - » 1 NAND 1 = 0
  - il risultato è *falso* se entrambi gli operandi sono <u>veri</u>

Operatori logici

- **Operatore *NOR***
  - tale operatore è equivalente ad un operatore *OR* negato
    - » $A \text{ NOR } B = \overline{A \text{ OR } B}$
  - si applica a due operandi e produce un valore in accordo alle seguenti regole:
    - » 0 NOR 0 = 1
    - » 0 NOR 1 = 0
    - » 1 NOR 0 = 0
    - » 1 NOR 1 = 0
  - il risultato è *vero* se entrambi gli operandi sono <u>falsi</u>

Operatori logici

- **Operatore *EX-OR*** *(OR esclusivo)*
  - tale operatore viene denotato dal simbolo $\oplus$
  - si applica a due operandi e produce un valore in accordo alle seguenti regole:
    - » $0 \oplus 0 = 0$
    - » $0 \oplus 1 = 1$
    - » $1 \oplus 0 = 1$
    - » $1 \oplus 1 = 0$
  - il risultato è *vero* se gli operandi sono <u>diversi</u> tra di loro

Operatori logici

- **Operatore *EX-NOR***
  - tale operatore è equivalente ad un operatore *EX-OR* negato
    - » $\overline{A \oplus B}$
  - si applica a due operandi e produce un valore in accordo alle seguenti regole:
    - » $\overline{0 \oplus 0} = 1$
    - » $\overline{0 \oplus 1} = 0$
    - » $\overline{1 \oplus 0} = 0$
    - » $\overline{1 \oplus 1} = 1$
  - il risultato è *vero* se gli operandi sono <u>uguali</u> tra di loro

Espressioni logiche

- Sono espressioni contenenti solo:
  - variabili booleane
  - le costanti 0 e 1
  - gli operatori logici

  Esempi

$$\overline{(a+b)}\cdot c$$

$$a\overline{b}+c(d+\overline{a}\,\overline{e})\cdot\overline{c\oplus e}$$

- Le funzioni logiche possono essere definite da espressioni logiche:

$$F_1=\overline{(a+b)}\cdot c$$

$$F_2=a\overline{b}+c(d+\overline{a}\,\overline{e})\cdot\overline{c\oplus e}$$

Espressioni logiche

- Due **espressioni** F_1 e F_2 si dicono **equivalenti** quando si verificano entrambe le seguenti condizioni:
  – tutte le combinazioni di variabili per cui F_1 vale 0 sono tali per cui anche F_2 vale 0 e viceversa
  – tutte le combinazioni di variabili per cui F_1 vale 1 sono tali per cui anche F_2 vale 1 e viceversa

  Ossia ingressi uguali danno uscite uguali in entrambe le funzioni
- Esempio

$$F_1 = x$$

$$F_2 = x \cdot 1$$

Espressioni logiche

- Due **espressioni** F_1 e F_2 si dicono **complementari** quando si verificano entrambe le seguenti condizioni:
  - tutte le combinazioni di variabili per cui F_1 vale 0 sono tali per cui F_2 vale 1 e viceversa
  - tutte le combinazioni di variabili per cui F_1 vale 1 sono tali per cui F_2 vale 0 e viceversa

  Ossia ingressi uguali danno uscite opposte nelle due funzioni
- Esempio

$$F_1 = a \text{ AND } b$$

$$F_2 = a \text{ NAND } b$$

Espressioni logiche

- Due **espressioni** F_1 e F_2 si dicono **duali** quando si verificano entrambe le seguenti condizioni:
  – tutti gli *OR* di F_1 corrispondono a *AND* di F_2 e viceversa
  – tutti gli 1 di F_1 corrispondono a 0 di F_2 e viceversa
- Esempio

$$F_1 = a + b \cdot (\bar{c} + 1)$$

$$F_2 = a \cdot b + (\bar{c} \cdot 0)$$

Calcolo di espressioni logiche

- Si devono utilizzare i teoremi propri dell’Algebra di Boole
- Spesso il calcolo è finalizzato a ridurre il numero di termini di una espressione booleana: *semplificazione delle espressioni*
- I due metodi per la semplificazione si basano rispettivamente su:
  ① i teoremi dell’Algebra di Boole
  ② le mappe di Karnaugh

Teoremi dell'algebra di Boole

- Principali teoremi

1) $x \cdot 0 = 0$ *duale* $x + 1 = 1$

2) $x \cdot 1 = x$ *duale* $x + 0 = x$

3) $x \cdot x = x$ *duale* $x + x = x$

4) $x \cdot \overline{x} = 0$ *duale* $x + \overline{x} = 1$

5) $x \cdot y = y \cdot x$ *duale* $x + y = y + x$

6) $x \cdot y \cdot z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ *duale*

$$x + y + z = (x + y) + z = x + (y + z)$$

7)Teorema di De Morgan

$$\overline{x \cdot y \cdot \ldots \cdot z} = \overline{x} + \overline{y} + \ldots + \overline{z} \qquad \textit{duale}$$

$$\overline{x + y + \ldots + z} = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \ldots \cdot \overline{z}$$

8) $x \cdot y + x \cdot z = x \cdot (y + z)$ *duale*

$$(x + y) \cdot (x + z) = x + y \cdot z$$

Teoremi dell'algebra di Boole

9) $x + x \cdot y = x$ *duale* $x \cdot (x + y) = x$

10) $x \cdot y + x \cdot \bar{y} = x$ *duale* $(x + y) \cdot (x + \bar{y}) = x$

11) $x + \bar{x} \cdot y = x + y$ *duale* $x \cdot (\bar{x} + y) = x \cdot y$

12) $z \cdot x + z \cdot \bar{x} \cdot y = z \cdot x + z \cdot y$ *duale*

$$(z + x) \cdot (z + \bar{x} + y) = (z + x) \cdot (z + y)$$

13) $x \cdot y + \bar{x} \cdot z + y \cdot z = x \cdot y + \bar{x} \cdot z$ *duale*

$$(x + y) \cdot (\bar{x} + z) \cdot (y + z) = (x + y) \cdot (\bar{x} + z)$$

14) $x \cdot y + \bar{x} \cdot z = (x + z) \cdot (\bar{x} + y)$ *duale*

$$(x + y) \cdot (\bar{x} + z) = x \cdot z + \bar{x} \cdot y$$

15) $x \cdot F(x, \bar{x}, y, \ldots, z) = x \cdot F(1, 0, y, \ldots, z)$

duale $x + F(x, \bar{x}, y, \ldots, z) = x + F(0, 1, y, \ldots, z)$

16) $F(x, \bar{x}, y, \ldots, z) = x \cdot F(1, 0, y, \ldots, z) +$
$+ \bar{x} \cdot F(0, 1, y, \ldots, z)$ *duale*

$$F(x, \bar{x}, y, \ldots, z) = [x + F(0, 1, y, \ldots, z)] \cdot$$
$$\cdot [\bar{x} + F(1, 0, y, \ldots, z)]$$

Teoremi dell'algebra di Boole

- Nei teoremi precedentemente elencati x, y e z possono essere considerate sia come *singole variabili* sia come *espressioni logiche*

  Esempio

  dalla regola 1 si ricava:

$$(A+B)\cdot 0=0$$

  considerando $(A+B)$ al posto di x

Semplificazioni con i teoremi

Semplificare le seguenti espressioni

1) $$X + \overline{Y} + \overline{X}Y + (X + \overline{Y})\overline{X}Y$$

$$X + Y + \overline{Y} + (X + \overline{Y})\overline{X}Y$$

$$X + 1 + (X + \overline{Y})\overline{X}Y$$

$$1 + \textit{qualsiasi espressione} = 1$$

2) $$(X + \overline{Y})\overline{X}Y + \overline{Z}$$

$$YX \cdot \overline{X} + \overline{Z}$$

$$Y \cdot 0 + \overline{Z} = \overline{Z}$$

Funzioni logiche e tabelle di verità

- Per ricavare la tabella di verità da una funzione logica si applicano tutte le combinazioni di valori agli ingressi e si valutano le uscite

Esempio

$$F\ (a,b,c) = (ab+\overline{b})\overline{c}$$

$a\ b\ c$	ab	$\overline{b}$	$\overline{c}$	$ab+\overline{b}$	$(ab+\overline{b})\overline{c}$
0 0 0	0	1	1	1	**1**
0 0 1	0	1	0	1	**0**
0 1 0	0	0	1	0	**0**
0 1 1	0	0	0	0	**0**
1 0 0	0	1	1	1	**1**
1 0 1	0	1	0	1	**0**
1 1 0	1	0	1	1	**1**
1 1 1	1	0	0	1	**0**

Forme canoniche delle espressioni

- **Forma canonica SP** (Somma di Prodotti)
  – E’ una somma logica di termini
  – Ogni termine (detto *minterm*) contiene il prodotto logico di <u>tutte</u> le variabili dell’espressione, ciascuna variabile può essere affermata o negata

Esempio

$$F(a,b,c) = \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$

l’espressione è composta da 4 minterm

Forme canoniche delle espressioni

- **Forma canonica PS** (Prodotti di Somme)
  - E' un prodotto logico di termini
  - Ogni termine (detto *maxterm*) contiene la somma logica di <u>tutte</u> le variabili dell'espressione, ciascuna variabile può essere affermata o negata

Esempio

$$F(a,b,c) = (a+b+\bar{c})\cdot(\bar{a}+b+c)\cdot(a+b+\bar{c})$$

l'espressione è composta da 3 maxterm

Forme canoniche delle espressioni

- **Scrittura della forma canonica SP data la tabella**

  Per ciascuna delle righe della tabella in cui la funzione ha risultato 1:

  » scrivere un prodotto di tutte le variabili

  » per ciascuna delle variabili del prodotto:

  - negarla se nella tabella ha valore 0

  Sommare i minterm

- **Scrittura della forma canonica PS data la tabella**

  Per ciascuna delle righe della tabella in cui la funzione ha risultato 0:

  » scrivere una somma di tutte le variabili

  » per ciascuna delle variabili della somma:

  - negarla se nella tabella ha valore 1

  Moltiplicare i maxterm

Forme canoniche delle espressioni

- Esempio

a b c	F
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	0

$$\bar{a}\bar{b}c$$

$$(\bar{a}+\bar{b}+c)$$

Risultati

SP: $F(a,b,c)=\bar{a}\bar{b}c+\bar{a}b\bar{c}+a\bar{b}\bar{c}+a\bar{b}c$

PS: $F(a,b,c)=(a+b+c)\cdot(a+\bar{b}+\bar{c})\cdot$

$\cdot(\bar{a}+\bar{b}+c)\cdot(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})$

Forme canoniche delle espressioni

Conversione in forma canonica di un’espressione SP non canonica

$$F(x,y,z) = x\bar{y}z + yz + \bar{x}$$

Si esamina ogni termine:

» se contiene tutte le variabili (minterm) il termine non necessita di modifiche

» altrimenti per ciascuna variabile X che manca, si moltiplica il termine per $(X + \bar{X})$ e si semplifica

Esempio

primo termine: $x\bar{y}z$

secondo: $yz \rightarrow yz(x+\bar{x}) \rightarrow yzx + yz\bar{x}$

terzo: $\bar{x} \rightarrow \bar{x}\cdot(y+\bar{y})\cdot(z+\bar{z}) \rightarrow$

$$\rightarrow \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

Forme canoniche delle espressioni

Conversione in forma canonica di un'espressione PS non canonica

$$F(x,y,z) = (\overline{x} + \overline{y} + z) \cdot (x + z) \cdot \overline{x}$$

Si esamina ogni termine:

» se contiene tutte le variabili (maxterm) il termine non necessita di modifiche

» altrimenti per ciascuna variabile X che manca, si aggiunge $X \cdot \overline{X}$ al termine, si usa la propr. distributiva e si semplifica

Esempio

primo termine: $(\overline{x} + \overline{y} + z)$

secondo: $(x + z) \rightarrow (x + z + y\overline{y}) \rightarrow$

$$\rightarrow (x + z + y) \cdot (x + z + \overline{y})$$

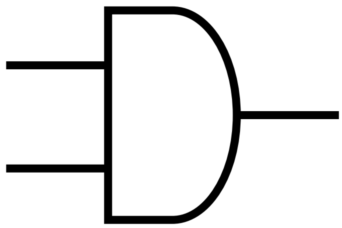
terzo: $\overline{x} \rightarrow (\overline{x} + y\overline{y} + z\overline{z}) \rightarrow \ldots$

Circuiti logici

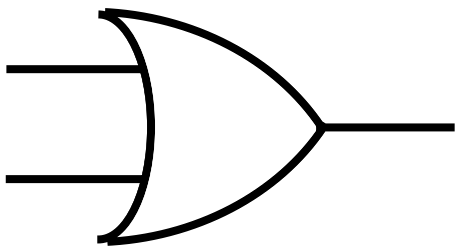
- Una funzione logica può essere rappresentata da un circuito logico
- Le variabili corrispondono ai fili in ingresso
- Il risultato corrisponde all'uscita del circuito
- Gli operatori logici corrispondono alle *porte logiche*

Porte logiche

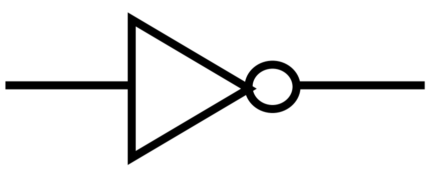
- **AND**



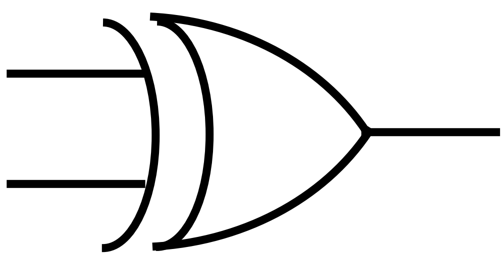
- **OR**



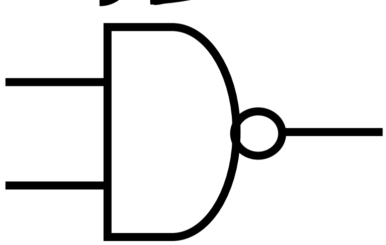
- **NOT**



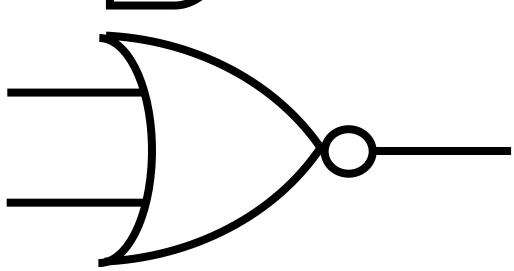
- **EXOR**



- **NAND**



- **NOR**

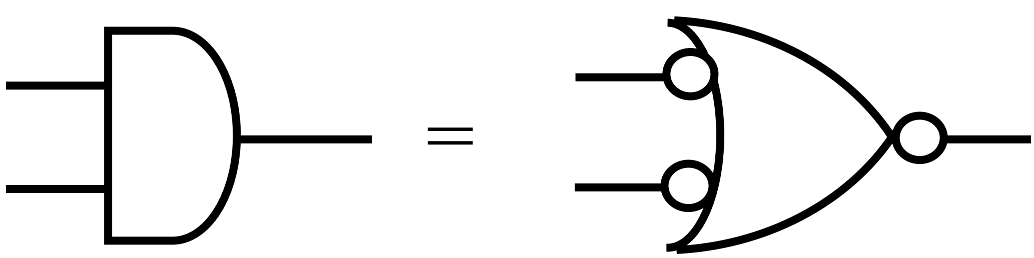


Porte logiche

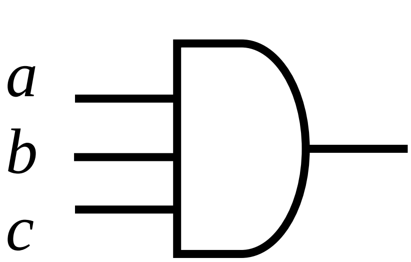
Equivalenze funzionali di porte

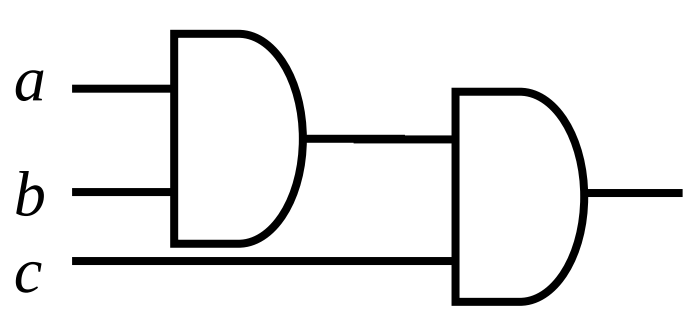
– Una porta AND può essere sostituita da una porta OR (e viceversa) negando sia gli ingressi sia le uscite (N.B. 2 negazioni si annullano)

Esempio



– Esistono porte a ingressi multipli:



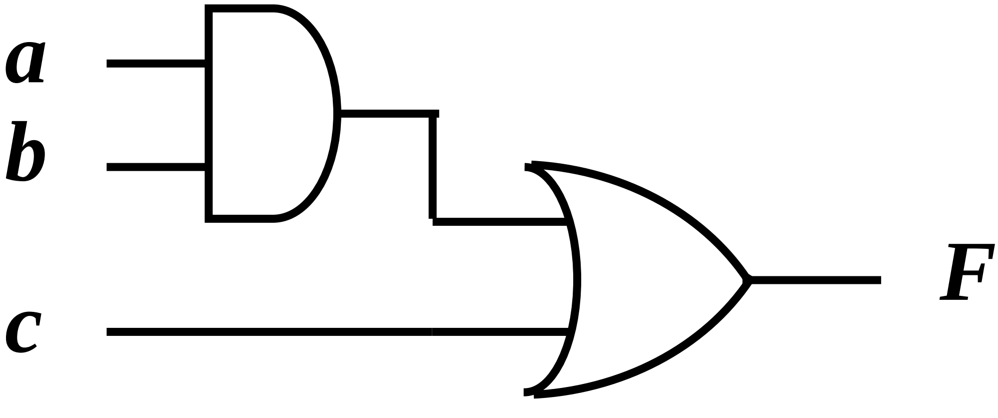


Lo stesso vale per la porta OR

Circuiti logici

Circuito logico equivalente ad una funzione

$$F(a,b,c) = a \cdot b + c$$



– Si noti come viene realizzata la priorità dell'AND sull'OR