Controllabilità e Raggiungibilità

Si tratta di analizzare le relazioni che esistono tra segnali d'ingresso e stati per stabilire se, agendo sugli ingressi, è possibile determinare il comportamento del sistema.

Controllabilità

Dato un sistema dinamico, è possibile determinare per ogni possibile stato iniziale un opportuno segnale di ingresso che porti, in un tempo finito, il sistema allo stato zero?

Raggiungibilità

Dato un sistema dinamico, è possibile determinare un opportuno segnale di ingresso che permetta di portare in un tempo finito, il sistema dallo stato zero ad un altro stato qualunque predeterminato?

In generale controllabilità e raggiungibilità non si implicano a vicenda.

Per i sistemi lineari invarianti tempo continui e per i sistemi lineari invarianti discreti a segnali campionati le due proprietà sono equivalenti.

Dato un sistema descritto in una delle forme seguenti

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

la matrice $M=[\ B\ AB\ \dots\ A^{n-l}B\ ]$ dove l è il rango di B e n la dimensione del sistema e' detta ***matrice di controllabilità.***

Nel caso di sistemi con un solo ingresso

$$M = \left[b, Ab, \dots, A^{n-1}b \right]$$

la matrice M è quadrata con dimensione $n \times n$

Il rango della matrice M fornisce informazioni sulla controllabilità :

se M è a rango pieno (n) il sistema è completamente controllabile. In tal caso si può passare da uno stato x_1 ad uno stato x_2 in tempo finito con un opportuno ingresso.

Se la matrice M di controllabilità ha rango

$r < n$ allora il sistema non è completamente controllabile, ma lo è un sottospazio di dimensioni r dello spazio degli stati.

Per determinare il sottospazio di controllabilità conviene trasformare il sistema nella forma canonica di controllabilità di Kalman.

In tale forma il vettore di stato z è ripartito nella parte controllabile z_c e in quella non controllabile z_{nc} .

Per mettere un sistema ad un ingresso nella forma canonica di controllabilità di Kalman si applica la trasformazione

$$x=Tz$$

dove la matrice T è costruita nel modo seguente:

• le prime r colonne di T sono uguali alle prime r colonne di M

• le rimanenti n-r colonne sono tali che T sia invertibile

Analoga trasformazione può essere usata per i sistemi con molti ingressi.

Si ottiene un sistema posto nella forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_c \\ \vdots \\ \dot{z}_{nc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^* & \cdots & A_{12}^* \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_c \\ \vdots \\ z_{nc} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^* \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u$$

z_c = variabili controllabili

z_{nc} = variabili non controllabili

Se la parte non controllabile ha condizioni iniziali nulle allora la dinamica del sistema è descritta da:

$$\dot{z}_c = A_{11}^* z_c + b_1^* u$$

Se la parte non controllabile è asintoticamente stabile si tende alla condizione sopra scritta.

Se un sistema ad un ingresso è posto in forma diagonale per la completa controllabilità delle variabili di stato è necessario che:

- gli elementi del vettore b siano diversi da zero
- gli autovalori siano tutti distinti

Altrimenti risultano controllabili solo le variabili che hanno i corrispondenti elementi del vettore b diversi da zero. Nel caso in cui alcune variabili di stato abbiano autovalori uguali la loro dinamica risulta però interdipendente.

Infatti, per un sistema in forma diagonale

$$x_i/t0| \; x_i/00e^{\varsigma_i t} \; 2 \int_0^t e^{\varsigma_i/t4\vartheta 0} b_i u/\vartheta 0 d\vartheta$$

$$| \; x_i/00e^{\varsigma_i t} \; 2 \; b_i \int_0^t e^{\varsigma_i/t4\vartheta 0} u/\vartheta 0 d\vartheta$$

$$x_j/t0| \; x_j/00e^{\varsigma_j t} \; 2 \; b_j \int_0^t e^{\varsigma_j/t4\vartheta 0} u/\vartheta 0 d\vartheta$$

Esempio:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 4\,5 & & & & & \\ & 4\,3 & & & & \\ & & 4\,2 & & & \\ & & & 4\,3 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 4\,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Esempio:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 4\,5 & & & & & \\ & 4\,3 & & & & \\ & & 4\,2 & & & \\ & & & 4\,3 & & \\ & & & & 3 & \\ & & & & & 4\,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 4\,2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

che può essere riordinata come

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_5 \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 4\,5 & & & & & \\ & 4\,3 & & & & \\ & & 4\,3 & & & \\ & & & 4\,4 & & \\ & & & & 4\,2 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4\,2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & 4 & \\ & & & 4 & \\ & A^*_{11} & & 4 & A^*_{12} \\ & & & 4 & \\ & & & 4 & \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ & & & 4 & \\ & A^*_{21} \,|\, 0 & & 4 & A^*_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ b^*_1 \\ \\ \\ 3 \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Attenzione! verificare controllabilità di

$$\dot{x} \,|\, A^*_{11} x \; 2 \; b^*_1 u$$

Se un sistema ad un solo ingresso ***completamente controllabile*** viene trasformato con la trasformazione *x*=*Tz* usando come matrice di trasformazione *T* la matrice *M* di controllabilità (*T*=*M*) allora viene posto nella ***prima forma canonica di controllabilità*** (o di controllo).

Prima Forma Canonica di Controllabilità

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u$$

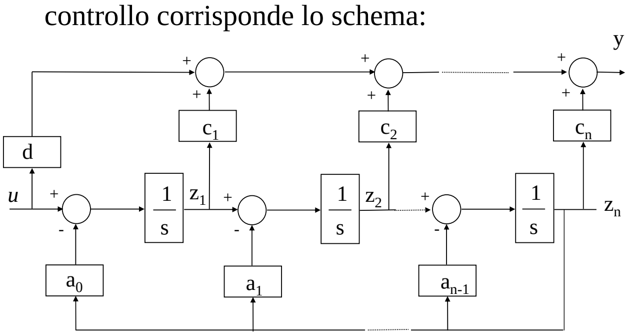
$$y = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_n \end{bmatrix} z + du$$

I coefficienti a_i sono i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice del sistema:

$$\varsigma^n + a_{n-1}\varsigma^{n-1} + \dots + a_1\varsigma + a_0 = \det(\varsigma I - A)$$

attenzione <u>non</u> $\det(A-\varsigma I)$!!

Al sistema nella prima forma canonica di controllo corrisponde lo schema:



Se sullo stesso sistema a un ingresso completamente controllabile si opera la trasformazione $x=Tz$, dove

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} e_n^T \\ e_n^T A \\ \vdots \\ e_n^T A^{n-1} \end{bmatrix}$$

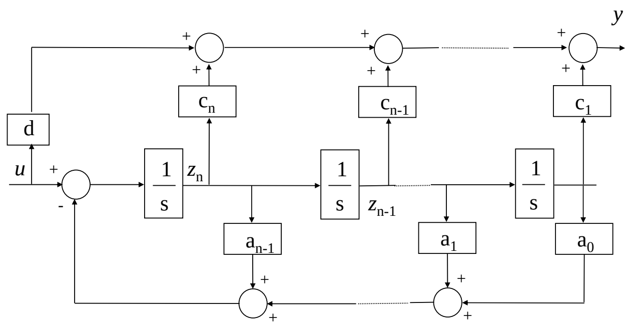
e e_n^T è l'ultima riga di M^{-1}.

allora si trasforma il sistema nella seconda forma canonica di controllo

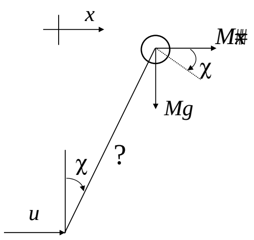
$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_n \end{bmatrix} z + du$$

A cui corrisponde lo schema:



Studiare la controllabilità del sistema di figura:



$$M\,\ddot{x}\cos\chi \; 2 \; \ddot{\chi}?M \,|\, M\,g\,sin\chi$$
$$\ddot{x}\cos\chi \; 2 \; \ddot{\chi}? \,|\, g\,sin\chi$$
ma anche
$$x \,|\, u \; 2 \; ?\,sin\chi$$

per angoli piccoli si linearizza il sistema che risulta

$$\ddot{x}\cancel{\cos\chi}^{\,1} \; 2 \; \ddot{\chi}? \,|\, g\,sin\chi$$
$$\frac{x\;4\;u}{?} \,|\, sin\chi$$

assumendo che l'accelerazione angolare sia $\ddot{\chi} \approx 0$
si ha

$$\ddot{x} \; 2 \; \cancel{\ddot{\chi}?}^{\,0} \,|\, \frac{g}{?}/x\;4\;u0$$

Detto $\begin{cases} x_1 \,|\, x \\ x_2 \,|\, \dot{x} \end{cases}$ si ha $\begin{cases} \dot{x}_1 \,|\, x_2 \\ \dot{x}_2 \,|\, \frac{g}{?}x_1 \; 4 \; \frac{g}{?}u \end{cases}$

$$\dot{x} \,|\, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/? & 0 \end{pmatrix} x \; 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4\,g/? \end{pmatrix} u$$

la matrice di controllabilità e'

$$M \,|\, \Psi b \;\; \pm b\,\beta | \begin{pmatrix} 0 & 4\,g/? \\ 4\,g/? & 0 \end{pmatrix}$$

Osservabilità

La controllabilità riguarda la possibilità di influire sul vettore degli stati a partire dagli ingressi.

L'osservabilità è il duale e riguarda l'influenza degli stati sulle uscite e la possibilità di ricostruire gli stati dalle uscite.

Uno stato x_i di un sistema dinamico è detto **non osservabile** se, a parità di ingresso $u(t)$, l'uscita del sistema non cambia se si varia solo il valore iniziale assunto dalla varibile x_i.

Anche per l'osservabilità limiteremo la nostra attenzione al caso di sistemi lineari invarianti (continui e discreti).

Dato un sistema descritto in una delle forme seguenti

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \,|\, Ax(t) \; 2 \; Bu(t) \\ y(t) \,|\, Cx(t) \; 2 \; Du(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x/k \; 2 \; 10 | \, Ax(k) \; 2 \; Bu(k) \\ y(k) \,|\, Cx(k) \; 2 \; Du(k) \end{cases}$$

La matrice

$$S = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-p} \end{pmatrix}$$

dove p è il rango di C ed n è la dimensione del sistema, è detta ***matrice di osservabilità.***

Nel caso di sistemi ad una uscita tale matrice diventa:

$$S = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A \\ c^T A^2 \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{pmatrix}$$

ed è una matrice quadrata $n \times n$

Il rango della matrice S di osservabilità fornisce informazioni sull'osservabilità del sistema:

Se S è a rango pieno (n) il sistema è completamente osservabile.

Se la matrice S di osservabilità ha rango $r < n$ allora il sistema non è completamente osservabile, ma lo è un sottospazio di dimensioni r dello spazio degli stati.

Per determinare il sottospazio di osservabilità conviene trasformare il sistema nella forma canonica di osservabilità di Kalman.

In tale forma il vettore di stato z è ripartito nella parte osservabile z_o e in quella non osservabile z_{no} .

Per mettere un sistema ad un'uscita nella forma canonica di osservabilità di Kalman si applica la trasformazione

$$x=Tz$$

dove la matrice T è costruita nel modo seguente:

• le prime r righe di T^{-1} sono uguali alle prime r righe di S.

• le rimanenti n-r righe di T^{-1} sono tali che T^{-1} sia invertibile.

Si ottiene un sistema posto nella forma:

$$\begin{pmatrix} \dot z_o \\ \dot z_{no} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^* & 0 \\ A_{21}^* & A_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_o \\ z_{no} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} c_1^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_o \\ z_{no} \end{pmatrix} + du$$

Se un sistema ad una uscita è posto in forma diagonale per la completa osservabilità delle variabili di stato è necessario che:

- gli elementi del vettore c^T siano diversi da zero
- gli autovalori siano distinti

Altrimenti risultano osservabili solo le variabili che hanno i corrispondenti elementi del vettore c^T diversi da zero. Nel caso in cui alcune variabili di stato abbiano autovalori uguali la loro dinamica risulta però indistinguibile.

Infatti per un sistema in forma diagonale la parte di evoluzione libera dell'uscita vale:

$$y(t) = c_1 x_1(0) e^{\lambda_1 t} + c_2 x_2(0) e^{\lambda_2 t} + \\ + \ldots.. + c_n x_n(0) e^{\lambda_n t}$$

Se un sistema completamente osservabile ad una sola uscita viene trasformato con la trasformazione

$$x=Tz$$

usando come matrice di trasformazione T la matrice S^{-1} (ossia $T= S^{-1}$) allora viene posto nella ***prima forma canonica di osservabilità***.

Prima forma canonica di osservabilità

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} z + du$$

Se sullo stesso sistema a un'uscita completamente osservabile si opera la trasformazione

$$x=Tz$$

dove

$$T = [\, e_n, Ae_n, \ldots, A^{n-1}e_n \,]$$

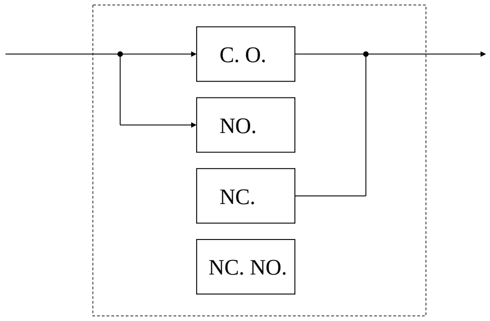
ed e_n è l'ultima colonna di S^{-1} allora si pone il sistema nella ***seconda forma canonica di osservabilità***.

Seconda forma canonica di osservabilità

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} z + du$$

Schema Riassuntivo su Controllabilità e Osservabilità.



Le quattro parti in cui può essere scomposto il sistema possono essere facilmente individuate se il sistema può essere messo in forma diagonale.

Il blocco non controllabile e non osservabile di massima non compare se la modellizzazione è stata fatta bene in quanto in quel blocco rientra tutto quanto non ha attinenza con il sistema.

$$\dot z = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \lambda_3 & & & \\ & & & \lambda_4 & & \\ & & & & \lambda_5 & \\ & & & & & \lambda_6 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{bmatrix} z + du$$

Le tre parti

- controllabile e osservabile
- controllabile, ma non osservabile
- non controllabile, ma osservabile

possono essere ricavate usando le forme canoniche di Kalman

Per far ciò

- si trasforma il sistema nella forma canonica di Kalman di controllabilità (osservabilità),
- si trasforma la prima parte completamente controllabile (osservabile) in forma canonica di Kalman di osservabilità (controllabilità).

Nota bene: la seconda trasformazione deve mantenere invariate le variabili non controllabili (non osservabili).

$$\begin{cases} \dot x = Ax + bu \\ y = c^T x \end{cases} \xrightarrow[M \Rightarrow T_1]{x = T_1 z^*} \begin{cases} \dot z^* = A^* z^* + b^* u \\ y = c^{*T} z^* \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot z_c^* \\ - \\ \dot z_{nc}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^* & | & A_{12}^* \\ - & | & - \\ 0 & | & A_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_c^* \\ - \\ z_{nc}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^* \\ - \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1^{*T} & | & c_2^{*T} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_c^* \\ z_{nc}^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\dot z_c^* = A_{11}^* z_c^* + b_1^* u \\ y = c_1^{*T} z_c^*\end{cases} \xrightarrow[S^* \to T_2^{-1}]{z_c^* = T_2 z} \begin{cases}\dot z = A^{**} z + b^{**} u \\ y = c^{**T} z\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}\dot z_o \\ \hline \dot z_{no}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}^{**} & 0 \\ \hline A_{21}^{**} & A_{22}^{**}\end{array}\right]\begin{bmatrix} z_o \\ \hline z_{no}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1^{**} \\ \hline b_2^{**}\end{bmatrix} u$$

$$y = \left[\begin{array}{c|c} c_1^{**T} & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix} z_o \\ z_{no}\end{bmatrix}$$

Usando quindi la trasformazione

$$\begin{bmatrix} z_c^* \\ \hline z_{nc}^* \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} T_2 & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right]\begin{bmatrix} z \\ \hline z_{nc}^* \end{bmatrix}$$

il sistema risulta nella forma:

$$\begin{bmatrix}\dot z_o \\ \hline \dot z_{no} \\ \hline z_{nc}^* \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} A_{11}^{**} & 0 & \\ \hline A_{21}^{**} & A_{22}^{**} & T_2^{-1} A_{12}^* \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & A_{22}^* \end{array}\right]\begin{bmatrix} z_o \\ \hline z_{no} \\ \hline z_{nc}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1^{**} \\ \hline b_2^{**} \\ \hline 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \left[\begin{array}{c|c|c} c_1^{**T} & 0 & c_2^{*T}\end{array}\right]\begin{bmatrix} z_o \\ z_{no} \\ z_{nc}^* \end{bmatrix}$$

Vale la pena di osservare che l'instabilità della parte non controllabile o della parte non osservabile hanno conseguenze molto gravi.

Relazione tra Funzione di Trasferimento e Rappresentazione in Variabili di Stato.

E' intuitivo che la funzione di trasferimento, che mette in relazione ingresso e uscita, può rappresentare solo la parte controllabile e osservabile.

Ciò è evidente se si considera il sistema in forma diagonale:

$$\begin{cases}\dot z = \Lambda z + bu \\ y = c^T z\end{cases}$$

dalla prima

$$\dot z_i = \lambda_i z_i + b_i u$$

$$sz_i = \lambda_i z_i + b_i u$$
$$(s - \lambda_i) z_i = b_i u$$
$$z_i = \frac{b_i}{s - \lambda_i} u$$

e quindi

$$y = \sum_i c_i z_i = \sum_i \frac{c_i b_i}{s - \lambda_i} u$$

Le variabili non controllabili se poste a condizioni iniziali nulle (come viene fatto con la funzione di trasferimento) non influenzano l'andamento dell'uscita.

Le variabili non osservabili non influenzano l'uscita per definizione.

In generale la relazione tra variabili di stato e funzione di trasferimento può essere ricavata nel modo seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sx(s) = Ax(s) + Bu(s) \\ y(s) = Cx(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} sx(s) - Ax(s) = Bu(s) \\ y(s) = Cx(s) \end{cases}$$
$$\begin{cases} (sI - A)x(s) = Bu(s) \\ y(s) = Cx(s) \end{cases}$$
$$\begin{cases} x(s) = (sI - A)^{-1} Bu(s) \\ y(s) = Cx(s) \end{cases}$$
$$y(s) = C(sI - A)^{-1} Bu(s) = G(s)u(s)$$

Quindi

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

e nel caso di un ingresso e una uscita

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b$$

Se il sistema è completamente controllabile e osservabile o se A, b, c^T rappresentano solo la parte controllabile e osservabile, allora il polinomio caratteristico di A coincide con il polinomio a denominatore di $G(s)$.

Gli autovalori di A sono i poli della funzione di trasferimento.

Il grado della funzione di trasferimento è uguale alla dimensione dello spazio sia controllabile che osservabile.

Si può anche dimostrare che la funzione di trasferimento di un sistema posto nella seconda forma canonica di controllo risulta essere:

$$G(s) = \frac{c_n s^{n-1} + c_{n-1} s^{n-2} + \ldots + c_2 s + c_1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} + d$$

dove le componenti c_i, $i=1..n$ del vettore c^T sono i coefficienti del polinomio a numeratore di $G(s)$.

Nota bene:

La rappresentazione in variabili di stato è più generale e tiene in conto anche parti che "vanno perse" quando si passa alla funzione di trasferimento autovalori di $\boldsymbol{A}$ e poli della F.d.T. coincidono solo se il sistema è completamente controllabile e osservabile.

In caso contrario i poli della F.d.T. sono un sottinsieme degli autovalori di A.

Da ciò segue che la F.d.T. deve avere tutti i poli a parte reale negativa (o nulla) per garantire l'asintotica (la semplice) stabilità.

Tale condizione è necessaria, ma non sufficiente.

Infatti la F.d.T. nulla dice sulle parti non controllabili e/o osservabili che potrebbero risultare instabili.

Da ciò dipende quanto detto a suo tempo a proposito di BIBO stabilità e stabilità alla Lyapunov.

Determinazione dell'ingresso per raggiungere uno stato assegnato nei sistemi lineari invarianti tempo discreti con un solo ingresso

Un tale sistema è descritto da

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k)$$

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} b u(i)$$

Sia $x(0)=x_0$, ne segue che

$$x(k) = A^k x_0 + A^{k-1}bu(0) + A^{k-2}bu(1) + \ldots$$
$$\ldots + Abu(k-2) + bu(k-1)$$

e anche

$$x(k) - A^k x_0 = A^{k-1}bu(0) + A^{k-2}bu(1) + \ldots$$
$$\ldots + Abu(k-2) + bu(k-1)$$

che può essere riscritta in forma matriciale come

$$x(k) - A^k x_0 = \left[b, Ab, \ldots, A^{k-1}b \right] \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Comandi MATLAB per controllabilità e osservabilità:

- `ctrb (A,b)`
- `obsv (A,b)`
- `ctrbf` (vedere help)
- `obsvf` (vedere help)