

COGNOME e Nome..... Matricola

Centro di Scano di Montiferru - MATEMATICA I

A

7 dicembre 2004

Esercizio 1

a) Dire che cosa si intende per serie geometrica di ragione q e discuterne la convergenza al variare di $q \in \mathbb{R}$.

b) Enunciare il criterio del confronto per le serie numeriche a termini di segno positivo.

c) Provare che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n + 7}{5^n}$ converge, e calcolarne la somma.

d) Confrontandola con la serie del punto c), e sapendo che $\forall n \geq 11, n! > 5^n$, si studi la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n + 3}{n!}$.

Esercizio 2

Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln \frac{5}{\sin x}$$

- a) Trovare il dominio di $f(x)$; dire se f è periodica; trovarne gli eventuali zeri e il segno.
- b) Calcolare i limiti agli estremi del dominio e indicare gli eventuali asintoti.
- c) Calcolare la derivata prima, gli intervalli di monotonia, gli eventuali punti di massimo e minimo di f .
- d) Calcolare la derivata seconda, gli intervalli di concavità, gli eventuali punti di flesso di f .

e) Tracciare un grafico qualitativo di f

f) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2 della funzione $f(x)$ centrato nel punto $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Esercizio 3

E' data la funzione $f(x) = x^2 \arctan x - \frac{1}{\sqrt{4x-3}}$.

a) Calcolare l' integrale $\int f(x) dx$.

b) Calcolare l' integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4x-3}} dx$.

Esercizio 4

a) Enunciare il teorema di Rolle.

b) Dire se alla funzione $f(x) = |3x - 1|$ è applicabile il teorema di Rolle nell'intervallo $\left[0, \frac{2}{3}\right]$

c) E' data la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 3a & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx - 16 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases} .$$

Determinare, se esistono, i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $g(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[0, 2]$.