

COGNOME e Nome..... Matricola

Centro di Scano di Montiferru - MATEMATICA I

A

23 maggio 2005

ESERCIZIO 1

Dire che cosa si intende per serie geometrica di ragione q e discuterne la convergenza al variare di $q \in \mathbb{R}$.

E' data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{1+a^2} \right)^n$$

dove $a \in \mathbb{R}$.

(a) Posto $a = 1$, dire se la serie converge.

(b) Posto $a = 3$, dire se la somma della serie vale 5.

(c) Se $-2 \leq a \leq 8$, dire se la serie converge.

ESERCIZIO 2.

E' data la funzione:

$$f(x) = \ln \frac{x}{x-2} + x.$$

- a) Trovarne il dominio, i limiti agli estremi del dominio, gli eventuali asintoti.
- b) Calcolarne la derivata prima di f , studiarne gli zeri e il segno; indicarne gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (relativi e assoluti).
- c) Tracciare un grafico qualitativo di f .
- d) Dire se $f(x)$ è suriettiva

ESERCIZIO 3

Sia

$$g(x) = \begin{cases} k(x+2)^4 & \text{se } x < -1 \\ \ln(1+x^2) & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

Determinare il valore di $k \in \mathbb{R}$ per cui g è continua su \mathbb{R} .

Sia $h(x)$ la funzione $g(x)$ in cui si è posto $k = \ln 2$.

(i) Dire se la funzione $h(x)$ è derivabile su \mathbb{R} .

(ii) Dire se alla funzione $h(x)$ è applicabile il teorema di Rolle sull'intervallo $[-2, 0]$, oppure sull'intervallo $[-1, 1]$.

(iii) Trovare il polinomio di Taylor del terzo ordine della funzione $h(x)$ definita in un intorno di $x_0 = 1$ e centrato nel punto $x_0 = 1$.

ESERCIZIO 4

a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \left(\frac{x}{\sqrt{(x^2 + 5)^3}} - 3x^2 e^x \right) dx.$$

b) Calcolare l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2 + 5)^3}} dx.$$