

Cognome Nome Matricola

Centro di Scano di Montiferru - MATEMATICA I

A

14 dicembre 2006

Esercizio 1

E' data la funzione

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^{2x} - 4e^x + 3}.$$

- a) Calcolare l' integrale indefinito $\int f(x)dx$
(si consiglia la sostituzione $e^x = t$).

- b) Calcolare l'integrale improprio $\int_2^{+\infty} f(x) dx$.

(e) Trovare l'insieme $\text{Im}(f)$. Dire se f è iniettiva e/o suriettiva

(f) Enunciare il teorema di esistenza degli zeri

Provare che il punto $x_0 = 0$ è l'unico zero di $f(x) = 1 - e^{-2x} + 4x$

(g) Scrivere il rapporto incrementale della funzione $f(x) = 1 - e^{-2x} + 4x$ nel punto $x = 0$ e ricavare poi $f'(0)$ **come limite di tale rapporto incrementale** (*non utilizzare il calcolo di $f'(x)$ eseguito nel punto (b)*).

ESERCIZIO 3.

Si consideri la funzione

$$f(x) = x \cos \frac{x}{\sqrt{3}} - \sin x + \sin^2 x - x^2.$$

(a) Scrivere lo sviluppo di Mac Laurin di ordine 4 di $f(x)$.

(b) Senza fare ulteriori calcoli, dire quanto vale $f^{(4)}(0)$.

(c) Enunciare il criterio del confronto asintotico per gli integrali impropri

Utilizzando il risultato trovato nel punto (a), dire se converge l'integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x} \tan(x^4)} dx$$

Esercizio 4

(A) Dire che cosa è una serie geometrica; discuterne la convergenza e la convergenza assoluta.

(B) Data la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3k+1}{3k-1} \right)^n, \quad k \in \mathbb{R}$$

(1) trovare (se esistono) i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la serie converge

(2) trovare (se esistono) i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la serie converge assolutamente

(3) trovare (se esistono) i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3k+1}{3k-1} \right)^n$ vale 0

(4) trovare (se esistono) i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3k+1}{3k-1} \right)^n$ vale $\frac{1}{4}$