POLITECNICO DI TORINO

Diploma Universitario Teledidattico - Polo di Torino

Matematica IV

Anno Accademico 2000-2001

Marco Codegone - Kemo Sokolija

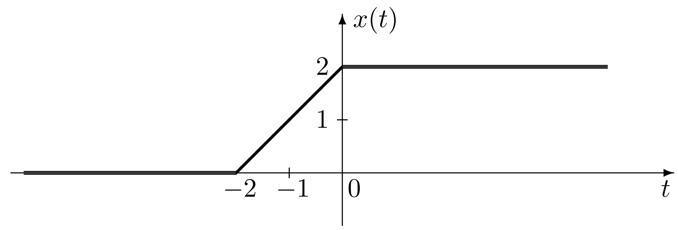
ESERCIZI

Introduzione

Questa raccolta di esercizi si aggiunge a quella già presente nel testo di *Marco Codegone e Marta Calanchi, Metodi Matematici per L'Ingegneria, Esercizi, Schemi dei lucidi, edito da Pitegora (Bologna 1999)* e alla analoga raccolta presentata nell'A.A. 1999-2000.
Gli esercizi qui proposti non si presentano sotto forma di questionario con risposte multiple, ma offrono alla attenzione dello studente degli esercizi da svolgere. In effetti oggi l'esame di Matematica IV è solo parzialmente composto da quesiti a risposta multipla. Viene oramai sempre aggiunto qualche esercizio del tipo di quelli qui presentati e da svolgere.
Alcuni degli esercizi che gli autori qui presentano sono tratti dai temi dati agli studenti negli ultimi appelli dell'Anno Accademico 2000-2001.
Speriamo che lo studente tragga giovamento da questo materiale didattico, che riguarda sopratutto la parte di descrizione di segnali lineari a tratti, distribuzioni e trasformate di Fourier e Laplace.
Il fatto, che l'esame si componga di una parte di domande corredate da risposte multiple e da una parte di esercizi da svolgere, rende più equilibrato il momento della valutazione, fornendo allo studente maggiori possibilità per mettere in evidenza le competenze acquisite nello studio e alla commissione di esame la possibilità di formulare il proprio giudizio su più elementi e quindi in modo più oggettivo.
Gli estensori di questa breve collezione di esercizi sono certi che gli studenti accoglieranno positivamente questo nuovo ausilio didattico che viene messo a loro disposizione.

1)

Sia $x(t)$ il segnale descritto dal seguente grafico:



a) Descrivere analiticamente $x(t)$ mediante funzioni a gradino o porte.

b) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t)$.

c) Calcolare la trasformata di Laplace di $x(t)$.

d) Dire quale parte del piano complesso è dominio della trasformata di Laplace di $x(t)$.

e) Ricavare graficamente la derivata prima distribuzionale di $x(t)$.

f) Esprimere analiticamente la derivata prima distribuzionale di $x(t)$.

g) Ricavare graficamente la derivata seconda distribuzionale di $x(t)$.

h) Esprimere analiticamente la derivata seconda distribuzionale di $x(t)$.

1) Soluzione

a) La descrizione del segnale $x(t)$ adatta per fare la trasformata di Fourier è la seguente:

$$\begin{aligned} x(t) &= (t+2)p_2(t+1) + 2u(t) = \\ &= (t+1)p_2(t+1) + p_2(t+1) + 2u(t) \end{aligned}$$

La descrizione del segnale $x(t)$ adatta per fare la trasformata di Laplace è invece la seguente:

$$x(t) = (t+2)u(t+2) - tu(t)$$

b) La trasformata di Fourier di $x(t)$ si ottiene con i seguenti calcoli:

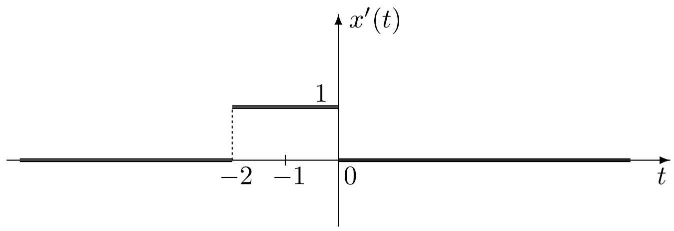
$$\begin{aligned} X(\omega) &= \mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\,\omega}\,\mathrm{j}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\frac{2\sin\omega}{\omega} + \mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\,\omega}\frac{2\sin\omega}{\omega} + 2\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega} + 2\pi\delta(\omega) = \\ &= \frac{2\omega\cos\omega - 2\sin\omega}{\omega^2}\,\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\,\omega} + \mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\,\omega}\frac{2\sin\omega}{\omega} + 2\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega} + 2\pi\delta(\omega) = \\ &= 2\frac{\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega}}{\omega}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\,\omega} - \frac{2\sin\omega}{\omega^2}\,\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\,\omega} + 2\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega} + 2\pi\delta(\omega) = \\ &= -\frac{2\sin\omega}{\omega^2}\,\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\,\omega} + 2\pi\delta(\omega) \end{aligned}$$

c) La trasformata di Laplace di $x(t)$ si ottiene con i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned} X(s) &= L[x(t)] = \frac{1}{s^2}\,\mathrm{e}^{\,2s} - \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}(\,\mathrm{e}^{\,2s} - 1) = \\ &= \frac{1}{s^2}\,\mathrm{e}^{\,s}\,(\,\mathrm{e}^{\,s} - \mathrm{e}^{\,-s}) = \\ &= \frac{(2\sinh s)}{s^2}\,\mathrm{e}^{\,s} \end{aligned}$$

d) Poichè la funzione $x(t)$ è nulla per $t < -2$, il dominio della trasformata di Laplace di $x(t)$ è un semipiano destro e precisamente: $\{s: \quad \mathbf{Re}s > 0\}$

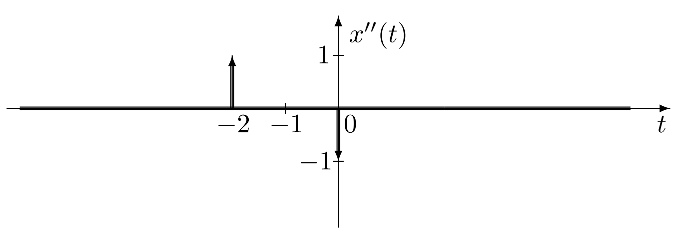
e) La derivata distribuzionale di $x(t)$ ha il seguente grafico:



f) La derivata distribuzionale $x'(t)$ ha la seguente espressione:

$$x'(t) = p_2(t+1)$$

g) La derivata seconda distribuzionale di $x(t)$ ha il seguente grafico:

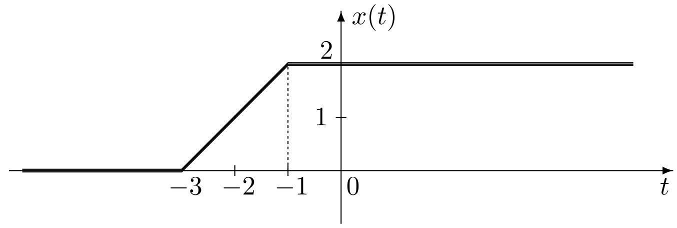


h) La derivata seconda distribuzionale $x''(t)$ ha la seguente espressione:

$$x''(t) = \delta(t+2) - \delta(t)$$

2)

Sia $x(t)$ il segnale descritto dal seguente grafico:



a) Descrivere analiticamente $x(t)$ mediante funzioni a gradino o porte.

b) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t)$.

c) Calcolare la trasformata di Laplace di $x(t)$.

d) Dire quale parte del piano complesso è dominio della trasformata di Laplace di $x(t)$.

e) Ricavare graficamente la derivata prima distribuzionale di $x(t)$.

f) Esprimere analiticamente la derivata prima distribuzionale di $x(t)$.

g) Ricavare graficamente la derivata seconda distribuzionale di $x(t)$.

h) Esprimere analiticamente la derivata seconda distribuzionale di $x(t)$.

1)	Soluzione

a) La descrizione del segnale $x(t)$ adatta per fare la trasformata di Fourier è la seguente:

$$\begin{aligned} x(t) &= (t+3)p_2(t+2) + 2u(t+1) = \\ &= (t+2)p_2(t+2) + p_2(t+2) + 2u(t+1) \end{aligned}$$

La descrizione del segnale $x(t)$ adatta per fare la trasformata di Laplace è invece la seguente:

$$x(t) = (t+3)u(t+3) - (t+1)u(t+1)$$

b) La trasformata di Fourier di $x(t)$ si ottiene con i seguenti calcoli:

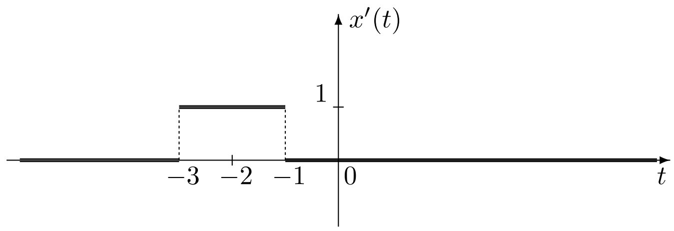
$$\begin{aligned} X(\omega) &= \mathrm{e}^{\,2\,\mathrm{j}\,\omega}\,\mathrm{j}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\frac{2\sin\omega}{\omega} + \mathrm{e}^{\,2\,\mathrm{j}\,\omega}\frac{2\sin\omega}{\omega} + \mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\,\omega}\left(2\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega} + 2\pi\delta(\omega)\right) = \\ &= \frac{2\omega\cos\omega - 2\sin\omega}{\omega^2}\,\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\,2\,\mathrm{j}\,\omega} + \mathrm{e}^{\,2\,\mathrm{j}\,\omega}\frac{2\sin\omega}{\omega} + 2\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\,\omega}\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega} + 2\pi\delta(\omega) = \\ &= \frac{2\,\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{j}\,\omega}}{\omega}\,\mathrm{e}^{\,2\,\mathrm{j}\,\omega} - \frac{2\sin\omega}{\omega^2}\,\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\,2\,\mathrm{j}\,\omega} + 2\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\,\omega}\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega} + 2\pi\delta(\omega) = \\ &= -\frac{2\sin\omega}{\omega^2}\,\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\,2\,\mathrm{j}\,\omega} + 2\pi\delta(\omega) \end{aligned}$$

c) La trasformata di Laplace di $x(t)$ si ottiene con i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned} X(s) &= L[x(t)] = \frac{1}{s^2}\,\mathrm{e}^{\,3s} - \frac{1}{s^2}\,\mathrm{e}^{\,s} = \frac{1}{s^2}(\,\mathrm{e}^{\,3s} - \,\mathrm{e}^{\,s}) = \\ &= \frac{1}{s^2}\,\mathrm{e}^{\,2s}\,(\,\mathrm{e}^{\,s} - \,\mathrm{e}^{-s}) = \\ &= \frac{(2\sinh s)}{s^2}\,\mathrm{e}^{\,2s} \end{aligned}$$

d) Poichè la funzione $x(t)$ è nulla per $t < -3$, il dominio della trasformata di Laplace di $x(t)$ è un semipiano destro e precisamente: $\{s : \quad \mathbf{Re} s > 0\}$

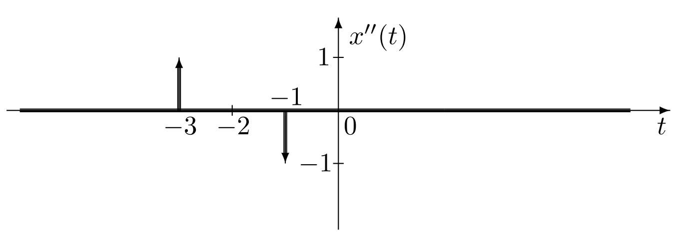
e) La derivata distribuzionale di $x(t)$ ha il seguente grafico:



f) La derivata distribuzionale $x'(t)$ ha la seguente espressione:

$x'(t) = p_2(t+2)$

g) La derivata seconda distribuzionale di $x(t)$ ha il seguente grafico:

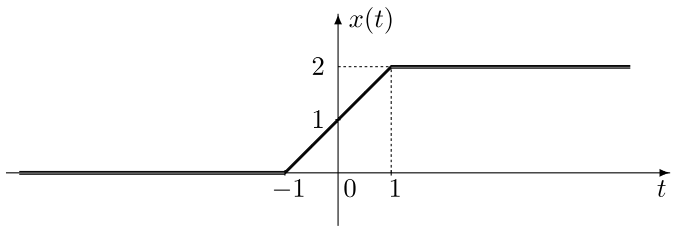


h) La derivata seconda distribuzionale $x''(t)$ ha la seguente espressione:

$x''(t) = \delta(t+3) - \delta(t+1)$

3)

Sia $x(t)$ il segnale descritto dal seguente grafico:



a) Descrivere analiticamente $x(t)$ mediante funzioni a gradino o porte.

b) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t)$.

c) Calcolare la trasformata di Laplace di $x(t)$.

d) Dire quale parte del piano complesso è dominio della trasformata di Laplace di $x(t)$.

e) Ricavare graficamente la derivata prima distribuzionale di $x(t)$.

f) Esprimere analiticamente la derivata prima distribuzionale di $x(t)$.

g) Ricavare graficamente la derivata seconda distribuzionale di $x(t)$.

h) Esprimere analiticamente la derivata seconda distribuzionale di $x(t)$.

3) Soluzione

a) La descrizione del segnale $x(t)$ adatta per fare la trasformata di Fourier è la seguente:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= (t+1)p_2(t) + 2u(t-1) = \\
&= tp_2(t) + p_2(t) + 2u(t-1)
\end{aligned}
$$

La descrizione del segnale $x(t)$ adatta per fare la trasformata di Laplace è invece quella col gradino unitario $u(t)$ e sue traslate:

$$
x(t) = (t+1)u(t+1) - (t-1)u(t-1)
$$

b) La trasformata di Fourier di $x(t)$ si ottiene con i seguenti calcoli:

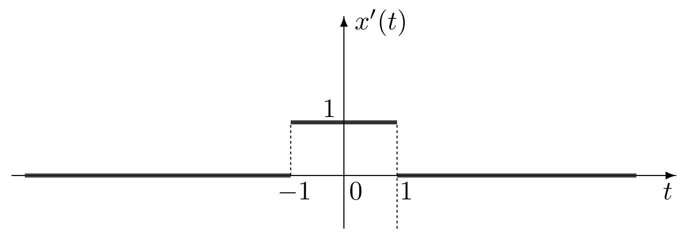
$$
\begin{aligned}
X(\omega) &= F[x(t)] = \mathrm{j}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\frac{2\sin\omega}{\omega} + \frac{2\sin\omega}{\omega} - 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega}\left(\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega} + \pi\delta(\omega)\right) = \\
&= \frac{2\,\mathrm{j}\,\omega\cos\omega - 2\,\mathrm{j}\,\sin\omega}{\omega^2} + \frac{2\sin\omega}{\omega} + 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega}\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega} + 2\pi\delta(\omega) = \\
&= \frac{2\,\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega}}{\omega} - \frac{2\,\mathrm{j}\,\sin\omega}{\omega^2} + \frac{2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega}}{\mathrm{j}\,\omega} + 2\pi\delta(\omega) = \\
&= -\frac{2\,\mathrm{j}\,\sin\omega}{\omega^2} + 2\pi\delta(\omega)
\end{aligned}
$$

c) La trasformata di Laplace di $x(t)$ si ottiene con i seguenti calcoli:

$$
\begin{aligned}
X(s) &= L[x(t)] = \frac{1}{s^2}\,\mathrm{e}^{s} - \frac{1}{s^2}\,\mathrm{e}^{-s} = \\
&= \frac{1}{s^2}(\,\mathrm{e}^{s} - \,\mathrm{e}^{-s}) = \\
&= \frac{(2\sinh s)}{s^2}
\end{aligned}
$$

d) Poichè la funzione $x(t)$ è nulla per $t < -1$, il dominio della trasformata di Laplace di $x(t)$ è un semipiano destro e precisamente: $\{s : \quad \mathbf{Re}s > 0\}$

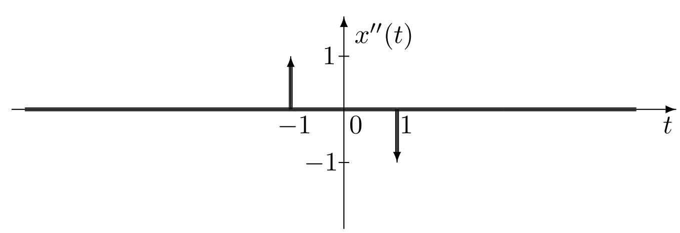
e) La derivata distribuzionale di $x(t)$ ha il seguente grafico:



f) La derivata distribuzionale $x'(t)$ ha la seguente espressione:

$x'(t) = p_2(t)$

g) La derivata seconda distribuzionale di $x(t)$ ha il seguente grafico:

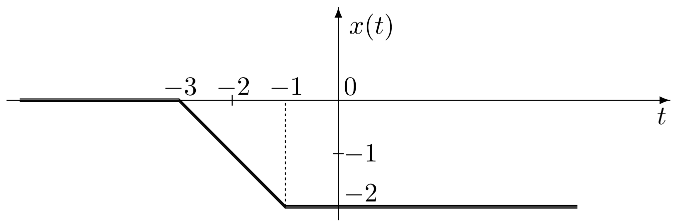


h) La derivata seconda distribuzionale $x''(t)$ ha la seguente espressione:

$x''(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1)$

4)

Sia $x(t)$ il segnale descritto dal seguente grafico:



a) Descrivere analiticamente $x(t)$ mediante funzioni a gradino o porte.

b) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t)$.

c) Calcolare la trasformata di Laplace di $x(t)$.

d) Dire quale parte del piano complesso è dominio della trasformata di Laplace di $x(t)$.

e) Ricavare graficamente la derivata prima distribuzionale di $x(t)$.

f) Esprimere analiticamente la derivata prima distribuzionale di $x(t)$.

g) Ricavare graficamente la derivata seconda distribuzionale di $x(t)$.

h) Esprimere analiticamente la derivata seconda distribuzionale di $x(t)$.

4)	Soluzione

a) La descrizione del segnale $x(t)$ adatta per fare la trasformata di Fourier è la seguente:

$$\begin{aligned} x(t) &= -(t+3)p_2(t+2) - 2u(t+1) = \\ &= -(t+2)p_2(t+2) - p_2(t+2) - 2u(t+1) \end{aligned}$$

La descrizione del segnale $x(t)$ adatta per fare la trasformata di Laplace è invece quella col gradino unitario $u(t)$ e sue traslate:

$$x(t) = -(t+3)u(t+3) + (t+1)u(t+1)$$

b) La trasformata di Fourier di $x(t)$ si ottiene con i seguenti calcoli:

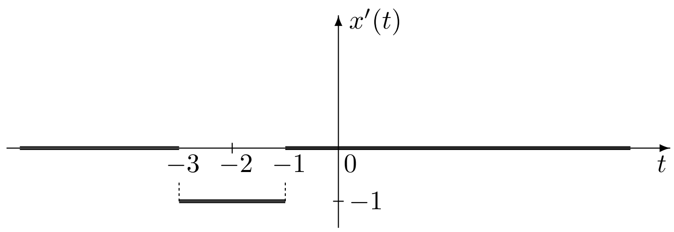
$$\begin{aligned} X(\omega) &= -\,\mathrm{e}^{\,2\,\mathrm{j}\,\omega}\,\mathrm{j}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\frac{2\sin\omega}{\omega} - \mathrm{e}^{\,2\,\mathrm{j}\,\omega}\frac{2\sin\omega}{\omega} - 2\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\,\omega}\left(\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega} + \pi\delta(\omega)\right) = \\ &= -\frac{2\,\mathrm{j}\,\omega\cos\omega - 2\,\mathrm{j}\,\sin\omega}{\omega^2}\;\mathrm{e}^{\,2\,\mathrm{j}\,\omega} - \frac{2\sin\omega}{\omega}\;\mathrm{e}^{\,2\,\mathrm{j}\,\omega} - 2\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}\,\omega}\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega} - 2\pi\delta(\omega) = \\ &= -2\,\mathrm{j}\;\mathrm{e}^{\,-\,\mathrm{j}\,\omega}\;\frac{1}{\omega}\;\mathrm{e}^{\,2\,\mathrm{j}\,\omega} + \frac{2\sin\omega}{\omega^2}\;\mathrm{j}\;\;\mathrm{e}^{\,2\,\mathrm{j}\,\omega} - 2\,\mathrm{e}^{\,-\,\mathrm{j}\,\omega}\;\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega} - 2\pi\delta(\omega) = \\ &= \frac{2\sin\omega}{\omega^2}\;\mathrm{j}\;\;\mathrm{e}^{\,2\,\mathrm{j}\,\omega} - 2\pi\delta(\omega) \end{aligned}$$

c) La trasformata di Laplace di $x(t)$ si ottiene con i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned} X(s) &= L[x(t)] = -\frac{1}{s^2}\,\mathrm{e}^{\,3s} + \frac{1}{s^2}\,\mathrm{e}^{\,s} = -\frac{1}{s^2}(\,\mathrm{e}^{\,3s} - \,\mathrm{e}^{\,s}) = \\ &= -\frac{1}{s^2}\,\mathrm{e}^{\,2s}\,(\,\mathrm{e}^{\,s} - \,\mathrm{e}^{\,-s}) = -\frac{1}{s^2}\,\mathrm{e}^{\,2s}\,(2\sinh s) = \\ &= -\frac{2\sinh s}{s^2}\,\mathrm{e}^{\,2s} \end{aligned}$$

d) Poichè la funzione $x(t)$ è nulla per $t < -3$, il dominio della trasformata di Laplace di $x(t)$ è un semipiano destro e precisamente: $\{s : \ \ \mathbf{Re}s > 0\}$

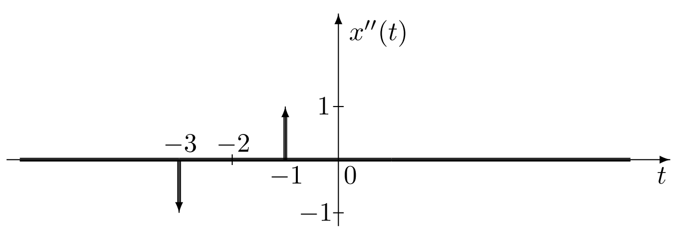
e) La derivata distribuzionale di $x(t)$ ha il seguente grafico:



f) La derivata distribuzionale $x'(t)$ ha la seguente espressione:

$x'(t) = -p_2(t+2)$

g) La derivata seconda distribuzionale di $x(t)$ ha il seguente grafico:

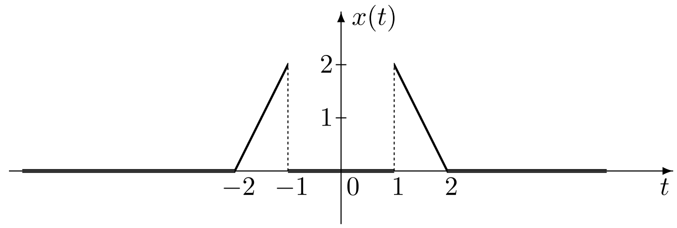


h) La derivata seconda distribuzionale $x''(t)$ ha la seguente espressione:

$x''(t) = -\delta(t+3) + \delta(t+1)$

5)

Sia $x(t)$ il segnale descritto dal seguente grafico:



a) Descrivere analiticamente $x(t)$ mediante funzioni a gradino o porte.

b) Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t)$.

c) Calcolare la trasformata di Laplace di $x(t)$.

d) Dire quale parte del piano complesso è dominio della trasformata di Laplace di $x(t)$.

e) Ricavare graficamente la derivata prima distribuzionale di $x(t)$.

f) Esprimere analiticamente la derivata prima distribuzionale di $x(t)$.

5)	Soluzione

a) La descrizione del segnale $x(t)$ adatta per fare la trasformata di Fourier è la seguente:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2(t+2)p_1(t+3/2) - 2(t-2)p_1(t-3/2) = \\ &= 2(t+3/2)p_1(t+3/2) + p_1(t+3/2) - 2(t-3/2)p_1(t-3/2) + \\ &\quad + p_1(t-3/2) \end{aligned}$$

La descrizione del segnale $x(t)$ adatta per fare la trasformata di Laplace è invece quella col gradino unitario $u(t)$ e sue traslate:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2(t+2)u(t+2) - 2(t+1)u(t+1) + \\ &\quad -2u(t+1) + 2u(t-1) + \\ &\quad -2(t-1)u(t-1) + 2(t-2)u(t-2) \end{aligned}$$

b) La trasformata di Fourier di $x(t)$ si ottiene con i seguenti calcoli:

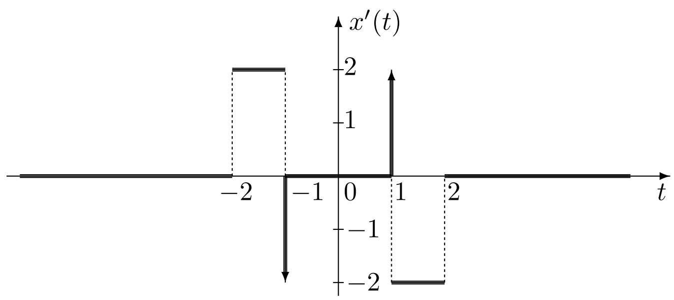
$$\begin{aligned} X(\omega) &= 2\,\mathrm{e}^{3\,\mathrm{j}\,\omega/2}\,\mathrm{j}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\frac{2\sin(\omega/2)}{\omega} + \mathrm{e}^{3\,\mathrm{j}\,\omega/2}\frac{2\sin(\omega/2)}{\omega} + \\ &\quad -2\,\mathrm{e}^{-3\,\mathrm{j}\,\omega/2}\,\mathrm{j}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\frac{2\sin(\omega/2)}{\omega} + \mathrm{e}^{-3\,\mathrm{j}\,\omega/2}\frac{2\sin(\omega/2)}{\omega} = \\ &= 2\left(\mathrm{j}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\frac{2\sin(\omega/2)}{\omega}\right)\left(\mathrm{e}^{3\,\mathrm{j}\,\omega/2} - \mathrm{e}^{-3\,\mathrm{j}\,\omega/2}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{2\sin(\omega/2)}{\omega}\right)\left(\mathrm{e}^{3\,\mathrm{j}\,\omega/2} + \mathrm{e}^{-3\,\mathrm{j}\,\omega/2}\right) = \\ &= 2\,\frac{\mathrm{j}\,\omega\cos(\omega/2) - 2\,\mathrm{j}\,\sin(\omega/2)}{\omega^2}\,2\,\mathrm{j}\,\sin(3\omega/2) + \frac{2\sin(\omega/2)}{\omega}\,2\cos(3\omega/2) = \\ &= \frac{-4\sin(3\omega/2)\cos(\omega/2)}{\omega} + \frac{8\sin(3\omega/2)\sin(\omega/2)}{\omega^2} + \\ &\quad + \frac{4\sin(\omega/2)\cos(3\omega/2)}{\omega} = \\ &= \frac{-4\sin\omega}{\omega} + \frac{4\cos\omega - 4\cos(2\omega)}{\omega^2} = \\ &= -\frac{4\sin\omega}{\omega} + \frac{4 - 8\sin^2(\omega/2) - 4 + 8\sin^2\omega}{\omega^2} = \\ &= 2\left[\left(\frac{2\sin\omega}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{2\sin(\omega/2)}{\omega}\right)^2 - \frac{2\sin\omega}{\omega}\right] \end{aligned}$$

c) La trasformata di Laplace di $x(t)$ si ottiene con i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned} X(s) &= L[x(t)] = 2\frac{1}{s^2}\,\mathrm{e}^{2s} - 2\frac{1}{s^2}\,\mathrm{e}^{s} - 2\frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{s} + 2\frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-s} - 2\frac{1}{s^2}\,\mathrm{e}^{-s} + 2\frac{1}{s^2}\,\mathrm{e}^{-2s} = \\ &= 2\frac{1}{s^2}(\mathrm{e}^{2s} - \mathrm{e}^{s} - \mathrm{e}^{-s} + \mathrm{e}^{-2s}) - 2\frac{1}{s}(\mathrm{e}^{s} - \mathrm{e}^{-s}) = \\ &= 2\frac{1}{s^2}\,(2\cosh(2s) - 2\cosh s) - 2\frac{1}{s}\,(2\sinh s) = \\ &= 2\frac{1}{s^2}\,\big(4\sinh^2 s + 2 - 4\sinh^2(s/2) - 2\big) - \frac{1}{s}\,(4\sinh s) = \\ &= 2\left[\left(\frac{2\sinh s}{s}\right)^2 - \left(\frac{2\sinh(s/2)}{s}\right)^2 - \frac{2\sinh s}{s}\right] \end{aligned}$$

d) Poichè la funzione $x(t)$ è nulla all'esterno di un intervallo limitato, il dominio della trasformata di Laplace di $x(t)$ è tutto il piano complesso

e) La derivata distribuzionale di $x(t)$ ha il seguente grafico:



f) La derivata distribuzionale $x'(t)$ ha la seguente espressione:

$x'(t) = 2p_1(t + 3/2) - 2\delta(t + 1) + 2\delta(t - 1) - 2p_1(t - 3/2)$