Scheda N. 13/2008

Antitrasformata di Laplace

13.1] Antitrasformate di funzioni razionali

Gli esercizi di questo primo punto riguardano l'antitraformata di Laplace di funzioni razionali o di funzioni razionali moltiplicate per degli esponenziali complessi. Per fare questi esercizi si deve procedere nel modo seguente:

a) individuare i poli delle funzioni da antitrasformare,

b) decomporre la funzione razionale in fratti semplici con il metodo dei residui,

c) ricordando che la antitrasformata di Laplace è lineare, si antitrasformi ogni singolo addendo della decomposizione in fratti semplici. Si osservi che gli addendi della decomposizione in fratti semplici sono trasformate note.

1) $L^{-1}[X_1(s)] = L^{-1}\left[\dfrac{3s^2+6s-3}{s^2+s-2}\right]$ 2) $L^{-1}[X_2(s)] = L^{-1}\left[\dfrac{2s^3+5s^2+2s+3}{s^3+s^2}\right]$

3) $L^{-1}[X_3(s)] = L^{-1}\left[\dfrac{s^2+3s+24}{s^2+9}\right]$ 4) $L^{-1}[X_4(s)] = L^{-1}\left[\dfrac{2s^2+11s+74}{s^2+4s+29}\right]$

13.2] Antitrasformate con fattori del tipo esponenziale complesso

Si antitrasformino le seguneti funzioni razionali moltiplicate per un esponenziale complesso. Si utilizzino i punti dell'esercizio precedente, osservando che se ci sono degli esponenziali complessi, come fattori moltiplicativi, questi provocano una traslazione nel tempo:

$$
\begin{aligned}
1)\quad L^{-1}[X_5(s)] &= L^{-1}\left[\frac{2s^2+1}{s^2+s-2}\ \mathrm{e}^{-5s}\right]\\
2)\quad L^{-1}[X_6(s)] &= L^{-1}\left[\frac{15s^4+10s^3-45s^2-16s+12}{(s+2)(s+1)s(s-1)(s-2)}\ \mathrm{e}^{-\pi s}\right]
\end{aligned}
$$

13.3] Antitrasformata unilatera di segnali periodici

Si ricordi che la trasformata di Laplace di segnali del tipo: $y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$ con $x(t)$ periodica di periodo T, è data da:

$$
L[y(t)] = \frac{L[x_0(t)]}{1-\mathrm{e}^{-Ts}} \qquad \text{ove} \qquad x_0(t) = \begin{cases} x(t) & \text{se } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{se } t < 0 \text{ e } t \geq T \end{cases}
$$

Si faccia la antitrasformata di Laplace di:

$$
Y(s) = \frac{1-2\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-2s}}{s^2(1-\mathrm{e}^{-2s})}
$$

Tabella per Antitrasformate di Laplace

$x(t)$	$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$	$\mathrm{dom}_{\mathcal{L}} X(s)$
$\delta(t)$	1	$\forall s$
$\delta(t-t_0)$	$\mathrm{e}^{-t_0 s}$	$\forall s$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathbf{Re}\ s > 0$
$u(t-t_0)$	$\frac{1}{s}\ \mathrm{e}^{-t_0 s}$	$\mathbf{Re}\ s > 0$
$u(t)\mathrm{e}^{s_0 t}$	$\frac{1}{s-s_0}$	$\mathbf{Re}\ s > \mathbf{Re}\ s_0$
$u(t)\sin\omega_0 t$ $\omega_0 \in \mathbf{R}$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathbf{Re}\ s > 0$
$u(t)\mathrm{e}^{\sigma_0 t}\sin\omega_0 t$ $\sigma_0,\ \omega_0 \in \mathbf{R}$	$\frac{\omega_0}{(s-\sigma_0)^2+\omega_0^2}$	$\mathbf{Re}\ s > \sigma_0$
$u(t)\cos\omega_0 t$ $\omega_0 \in \mathbf{R}$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathbf{Re}\ s > 0$
$u(t)\mathrm{e}^{\sigma_0 t}\cos\omega_0 t$ $\sigma_0,\ \omega_0 \in \mathbf{R}$	$\frac{s-\sigma_0}{(s-\sigma_0)^2+\omega_0^2}$	$\mathbf{Re}\ s > \sigma_0$