Scheda N. 12/2008

Trasformate di Laplace

12.1] Calcolo della trasformata di una porta

A] Calcolare la trasformata di Laplace di:

$$p_2(t-1) = u(t) - u(t-2)$$

facendo l'esercizio in diversi modi:

1) Si calcoli, tenendo presente che $p_2(t-1)$ è nullo per $t < 0$ e per $t > 2$, la trasformata di Laplace facendo l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_2(t)\mathrm{e}^{-st}dt$$

si segnali poi per quali valori di $s = \sigma + \mathrm{j}\omega$ l'integrale converge.

2) Osservando che $p_2(t-1)$ è combinazione lineare di due funzioni a gradino si proceda nel modo seguente:

   a) si calcoli, con l'integrale di Laplace, la trasformata di $u(t)$,
   b) mediante la proprietà di traslazione nel tempo si calcoli la trasformata di $u(t-2)$,
   c) applicando la proprietà di linearità si ricavi la trasformata di $p_2(t-1)$.

3) Osservando che, con le opportune riflessioni sul dominio della trasformata, vale la seguente proprietà:

$$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[x'(t)] \tag{1}$$

   a) si calcoli la derivata distribuzionale di $p_2(t-1)$,
   b) si calcoli la trasformata di Laplace della derivata calcolata nel punto a), tenendo presente che $\mathcal{L}\ [\delta(t)] = 1$,
   c) infine utilizzando la (1) si ottenga la trasformata di $p_2(t-1)$.

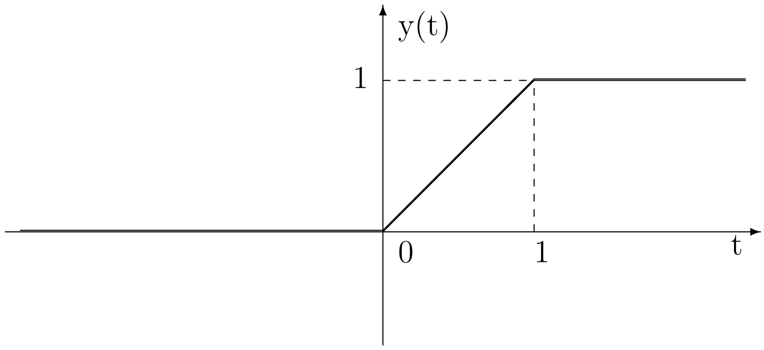
4) Si tenga presente che una trasformata fondamentale, come si può facilmente verificare con il calcolo dell'intergrale che definisce la trasformata, è la seguente:

$$\mathcal{L}[p_a(t)] = \mathcal{L}[u(t+\frac{a}{2}) - u(t-\frac{a}{2})] = \frac{2\sinh\frac{as}{2}}{s}$$

si calcoli, quindi, la trasformata di $p_2(t-1)$, utilizzando la proprietà di traslazione nel tempo.

12.2] Calcolo della trasformata di una rampa limitata

B] Calcolare la trasformata di Laplace del segnale $y(t)$ dato graficamente:



1) In un primo tempo si proceda nel modo seguente:
   a) si descriva il segnale mediante le funzioni a gradino, ottenendo la seguente espressione:
   $$y(t) = tu(t) - tu(t-1) + u(t-1)$$
   b) si applichi la proprietà di linearità della trasformata,
   c) si applichi agli addendi interessati la proprietà di derivata nella variabile s,
   d) con la proprietà di traslazione, si ricavi la trasformata di $u(t-1)$ (si tenga presente che nell'esercizio precedente A] 2) a) si è calcolata la trasformata di Laplace di $u(t)$),
   e) si dia una espressione finale alla trasformata richiesta e se ne discuta il dominio.

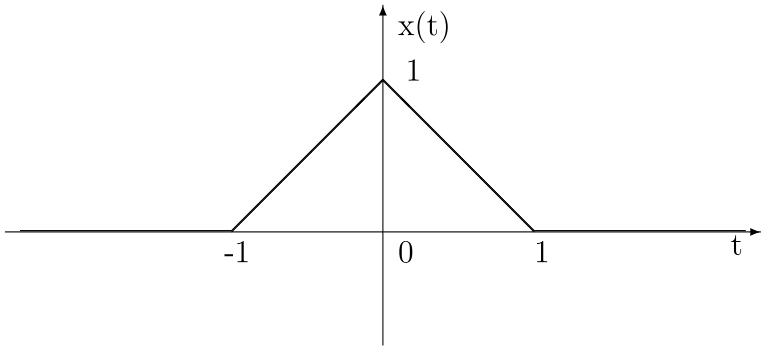
2) Si osservi che il segnale $y(t)$ si può scrivere nel modo seguente:
   $$y(t) = tu(t) - (t-1)u(t-1)$$
   poi si proceda con le tappe seguenti:
   a) si applichi la proprietà di linearità,
   b) si trascrivano le trasformate di $u(t)$, $u(t-1)$ e $tu(t)$ già calcolate negli esercizi precedenti,
   c) si calcoli la trasformata di Laplace di
   $$(t-1)u(t-1)$$
   applicando dapprima la proprietà di traslazione nel tempo e poi quella di derivata nella variabile s,
   d) si dia una espressione finale alla trasformata richiesta.

3) Si provi,infine, a fare l'esercizio nel modo seguente:

   a) si calcoli la derivata distribuzionale di $y(t)$,
   b) si calcoli la trasformata della derivata ottenuta,
   c) si divida per s il risultato ottenuto e lo si confronti con i risultati dei punti 1) e 2).

12.3] Trasformata del segnale triangolare

C] Si calcoli la trasformata di Laplace di:



1) Si proceda in un primo tempo con le seguenti indicazioni:

   a) si descriva il segnale con le funzioni a gradino,
   b) con le proprieà di linearità, traslazione nel tempo, derivata nella variabile s si arrivi alla trasformata di $x(t)$.

2) Si verifiche che:

$$x(t) = [u(t+\frac{1}{2})-u(t-\frac{1}{2})]*[u(t+\frac{1}{2})-u(t-\frac{1}{2})] = p_1(t)*p_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(\tau)*p_1(t-\tau)\ d\tau$$

Si applichi, poi, la proprietà della trasformata del prodotto di convoluzione e si osservi che in questo modo ci si riconduce a calcolare la trasformata di $p_1(t)$. Si concluda confrontando il risultato con quello del punto 1).

12.4] Trasformate di segnali sinusoidali, smorzati o amplificati

D] Utilizzando le proprietà della trasformata di Laplace si calcolino le seguenti trasformate:

$$\mathcal{L}[u(t)\mathrm{e}^{-5t}\sin 3t]$$
$$\mathcal{L}[u(t)\mathrm{e}^{2t}\cos \pi t]$$
$$\mathcal{L}[u(t)\sin 4t]$$

12.5] Trasformate unilatere di segnali periodici

E] Ricordando la proprietà che riguarda la tasformata di segnali:

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{per} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{per} \quad t < 0 \end{cases}$$

con $x(t)$ periodica di periodo T, fare la trasformata del seguente segnale: