Scheda N. 11/2008

Trasformata di Fourier di segnali periodici

11.1] Convoluzione col treno di impulsi

Richiamiamo le espressioni della trasformata di Fourier di segnali periodici. Sia $x(t)$ un segnale periodico di periodo T e cioè:

$$x(t) = x(t-T)$$

$$\begin{array}{ll} T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{1}{f_0} & \text{periodo} \\ \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f_0 & \text{frequenza angolare} \\ f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{T} & \text{frequenza} \end{array}$$

Sia inoltre

$$x_0(t) = \begin{cases} x(t) & \text{in un intervallo I di ampiezza T} \\ 0 & \text{all'esterno di I} \end{cases}$$

ovvero:

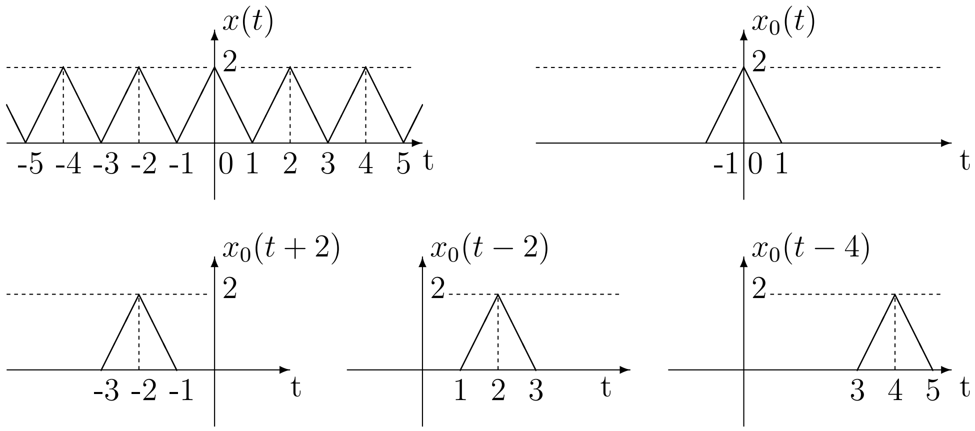
$$x_0(t) = \begin{cases} x(t) & 0 \le t < T \\ 0 & t < 0 \quad \text{e} \quad t \ge T \end{cases}$$

o anche:

$$x_0(t) = \begin{cases} x(t) & -\frac{T}{2} \le t < \frac{T}{2} \\ 0 & t < -\frac{T}{2} \quad \text{e} \quad t \ge \frac{T}{2} \end{cases}$$

Si ha allora che:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x_0(t) * \delta(t-nT)] = x_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$$



Da cui ricordando la proprietà della **trasformata della convoluzione**:

$$\mathcal{F}[x(t) * y(t)] = \mathcal{F}[x(t)]\ \mathcal{F}[y(t)]$$

e la **trasformata del treno di impulsi**:

$$\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)\right] = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

si ha:

$$\boxed{\mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}[x_0(t)] \cdot \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0)}$$

che si può anche scrivere:

$$\boxed{X(\omega) = X_0(\omega) \cdot \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0)}$$

o ancora:

$$\boxed{X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega_0\ X_0(n\omega_0)\ \delta(\omega - n\omega_0) \ = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n\ \delta(\omega - n\omega_0)}$$

Si osservi che:

$$\beta_n = \omega_0\ X_0(n\omega_0) = 2\pi\ \frac{1}{T}\ \int_{-\infty}^{+\infty} x_0(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\frac{2\pi}{T}t}\ dt = 2\pi c_n$$

ove c_n è il coefficiente della `serie` di Fourier in forma esponenziale di $x(t)$:

$$\boxed{\beta_n = 2\pi c_n}$$

Osservazione

Se il segnale $x(t)$ è una funzione periodica di periodo T (e quindi frequanza angolare $\omega_0 = 2\pi/T$, di cui si cosce la serie di Fourier:

$$x(t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \; c_n \; \mathrm{e}^{j\,n\,\omega_0\,t}$$

si può direttamente trasformare la serie:

$$\mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \; c_n \; \mathrm{e}^{j\,n\,\omega_0 t}\right].$$

Ricordando che:

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{j\,n\,\omega_0\,t}\right] = 2\pi\delta(\omega - n\,\omega_0)$$

si ha:

$$\mathcal{F}[x(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \; c_n \; 2\pi\delta(\omega - n\,\omega_0).$$

Si ha quindi che la trasformata di Fourier di una serie di Fourier è una somma di delta di Dirac di altezza

$$\beta_n = 2\pi c_n.$$

Dalla definizione dei coefficienti di Fourier c_n, si ricava:

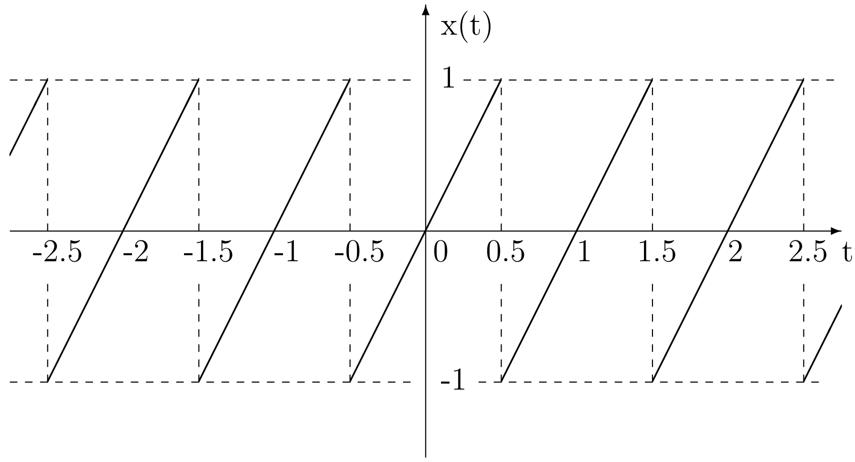
$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_0(t)\,\mathrm{e}^{-j\,n\,\omega_0\,t}\,\mathrm{d}\,t,$$

da cui si ha facilmente:

$$\begin{aligned}
c_n \;&=\; \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_0(t)\,\mathrm{e}^{-j\,n\,\omega_0\,t}\,\mathrm{d}\,t \;&=\; \frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} p_T(t)\,x(t)\,\mathrm{e}^{-j\,n\,\omega_0\,t}\,\mathrm{d}\,t \;=\\
&=\; \frac{\omega_0}{2\pi}\,\mathcal{F}[p_T(t)\,x(t)]_{\omega=n\,\omega_0} \;&=\; \frac{\omega_0}{2\pi}\,\mathcal{F}[x_0(t)]_{\omega=n\,\omega_0}\\
&=\; \frac{\omega_0}{2\pi}\,X_0(n\,\omega_0) \;&=\; \frac{\beta_n}{2\pi}.
\end{aligned}$$

11.2] Calcolo di trasformate di segnali periodici

A] Calcolare la trasformata di Fourier del seguente segnale dato graficamente:



Si proceda nel modo seguente:

1) si determini il periodo T, la frequenza angolare ω_0 e la frequenza f di $x(t)$;

2) si individui $x_0(t)$ uguale a $x(t)$ in un intervallo di ampiezza T e zero altrove;

3) si calcoli la trsformata di Fourier di $x_0(t)$: $\mathcal{F}[x_0(t)] = X_0(\omega)$;

4) si calcoli $X_0(n\omega_0)$;

5) si scriva la trasformata di Fourier di $x(t)$:

$$\mathcal{F}[x(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega_0 \; X_0(n\omega_0) \; \delta(\omega - n\omega_0)$$

6) si esplicitino i coefficienti:

$$\beta_n = \omega_0 \; X_0(n\omega_0)$$

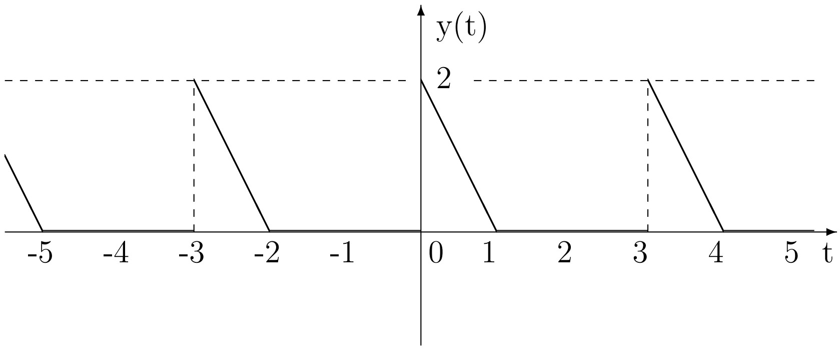
confrontandoli con quelli della serie di Fourier in forma esponenziale di $x(t)$ (vedi scheda N. 5). Si osservi che se:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0 t}$$

si ha:

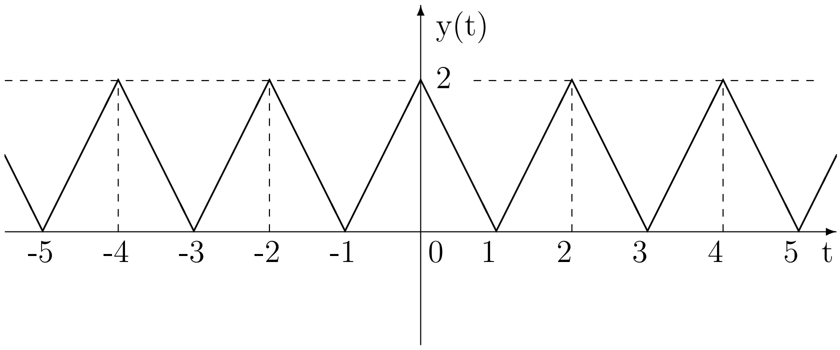
$$2\pi c_n = \beta_n$$

B] Calcolare la trasformata di Fourier del seguente segnale dato graficamente:



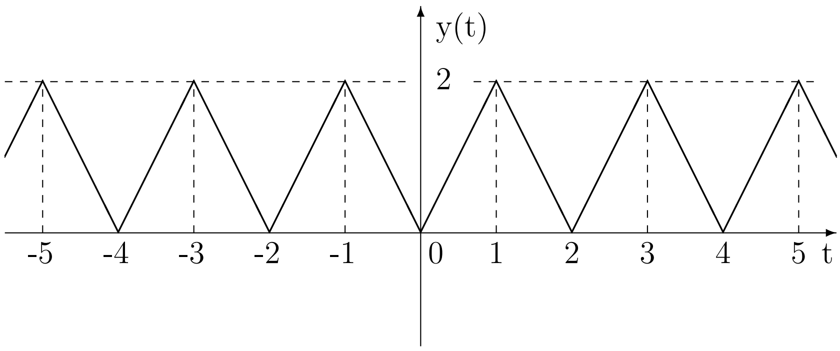
Si sviluppi l'esercizio secondo i punti 1), 2) $\cdots$ 6) dell'esercizio A].

C] Calcolare la trasformata di Fourier del seguente segnale dato graficamente:



Si sviluppi l'esercizio secondo i punti 1), 2) $\cdots$ 6) dell'esercizio A].

D] Calcolare la trasformata di Fourier del seguente segnale dato graficamente:



Si sviluppi l'esercizio secondo i punti 1), 2) $\cdots$ 6) dell'esercizio A].