Scheda N. 10/2008

Ulteriori proprietà della trasformate di Fourier

10.1 Calcolo con la proprietà di risclamento

A] Proprietá di **riscalamento**:

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{|a|} X(\frac{\omega}{a})$$

Ricordando (o ricalcolandosi di nuovo con i metodi illustrati nella scheda precedente) la trasformata di Fourier di $p_4(t-2)$ si calcoli la trasformata di Fourier del segnale:

$$p_4(-t-2)$$

pensandolo come un riscalamento di $p_4(t-2)$ con $a = -1$.

10.2 Calcolo con la proprietà di derivata nel tempo

B] Proprietá di **derivata nel tempo**:

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = \mathrm{j}\omega X(\omega)$$

Ricordando (o ricalcolandosi di nuovo con i metodi illustrati nella scheda N. 10) la trasformata di Fourier di $u(t-5)$ si calcoli la trasformata di Fourier del segnale:

$$\frac{d}{dt}u(t-5)$$

Si confronti il risultato ottenuto con la trasformata di Fourier di $\delta(t-5)$ ricavata come traslazione nel tempo della trasformata della delta di Dirac:

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$$

10.3 Calcolo con la proprietà di derivata in frequenza

C] Proprietá di **derivata in frequenza**:

$$\boxed{\mathcal{F}[-\mathrm{j}tx(t)] = \frac{d}{d\omega}X(\omega)}$$

Si calcolino le trasformate di Fourier dei segnali seguenti:

1) $tu(t)$
2) $(t-1)u(t)$
3) $(t-1)u(t-1)$
4) $3t\,(u(t)-u(t-4))$

10.4 Calcolo con la proprietà di simmetria

D] Proprietá di **simmetria**:

$$\boxed{\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega) \Longrightarrow \mathcal{F}[X(t)] = 2\pi x(-\omega)}$$

1) Ricordando la trasformata di Fourier della porta $p_2(t)$ di larghezza 2, si calcoli:
$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin t}{t}\right]$$
2) A partire dalla trasformata della delta di Dirac si calcoli la trasformata di Fourier della funzione costante $x(t) = 1$ per $-\infty < t < +\infty$.
3) Tenendo presente la trasformata della funzione costante uguale a 1 e la proprietà di traslazione in frequenza, si ricavi la trasformata di
$$x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}t}$$
4) Ricordando che il sin si può scrivere come combinazione lineare di esponenziali complessi e le indicazioni dell'esercizio 3) precedente, si ricavi la trasformata di:
$$x(t) = 2\sin 3t$$
5) Ricordando che il cos si può scrivere come combinazione lineare di esponenziali complessi e le indicazioni dell'esercizio 3) precedente, si ricavi la trasformata di:
$$x(t) = 5\cos 4t$$

10.5 Calcolo con la proprietà di coniugazione, realtà e parità o disparità

E] Proprietá di **coniugazione**:

$$\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega) \Longrightarrow \mathcal{F}[x^*(t)] = X^*(-\omega)$$

Proprietá di **realtà e parità**:

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & x^*(t) \\ x(t) & = & x(-t) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} X(\omega) & = & X^*(\omega) \\ X(\omega) & = & X(-\omega) \end{array}\right.$$

Proprietá di **realtà e disparità**:

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & x^*(t) \\ x(t) & = & -x(-t) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} X(\omega) & = & -X^*(\omega) \\ X(\omega) & = & -X(-\omega) \end{array}\right.$$

Calcolare le trasformate di:

1) $-2p_1(t + \frac{5}{2}) + p_4(t) - 2p_1(t - \frac{5}{2})$ e osservare che il risultato è reale e pari;

2) $-2(t+2)[u(t+2) - u(t+1)] + 2t[u(t+1) - u(t-1)] - 2(t-2)[u(t-1) - u(t-2)]$ e osservare che il risultato è immaginario puro e dispari;

3) $(t+1)p_2(t) + 2u(t-1)$ e osservare che il risultato non è nè pari nè dispari.

10.6 Calcolo con la proprietà di convoluzione.

F] Proprietá di **convoluzione**:

$$\boxed{\mathcal{F}[x(t) * y(t)] = X(\omega)Y(\omega)}$$

Calcolare le tresformate di Fourier dei seguenti prodotti di convoluzione:

1) $x_1(t) = u(t) * u(t)$

2) $x_2(t) = u(t) * \mathrm{e}^{-t}u(t)$

3) $x_3(t) = p_1(t) * p_1(t)$

Avendo indicato con $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ e $X_3(\omega)$ le tresformate di Fourier di $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$, si antitrasformino $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ e $X_3(\omega)$.

10.7 Calcolo con la proprietà di prodotto.

G] Proprietá di **prodotto**:

$$\boxed{\mathcal{F}[x(t)y(t)] = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * Y(\omega)}$$

Calcolare le tresformate di Fourier dei seguenti prodotti (utilizzando la proprietà del prodotto):

1) $x_1(t) = \pi\, p_2(t) \;\cdot\; \dfrac{\sin t}{\pi t}$

2) $x_2(t) = \dfrac{\sin t}{\pi t} \;\cdot\; \dfrac{\sin t}{\pi t}$

3) $x_3(t) = \pi\, p_2(t) \;\cdot\; \delta(t)$