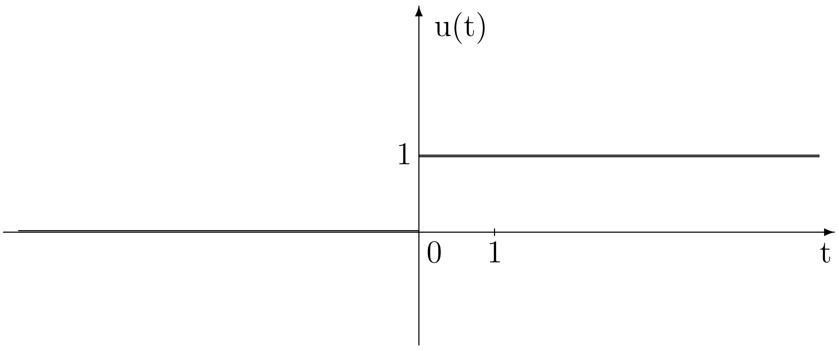
Scheda N. 8/2008

Distribuzioni

8.1] Gradino e porta

Si ricordi che indichiamo con $u(t)$ la seguente funzione:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



A] Traslate del gradino e loro combinazioni:

1) fare il grafico di $u(t-1)$, $u(t+1)$, $u(-t)$, $u(1-t)$ e di $u(-1-t)$;

2) disegnare la porta di ampiezza 3:

$$p_3(t) = u(t+\frac{3}{2}) - u(t-\frac{3}{2})$$

si rifletta sul fatto che la porta $p_3(t)$ di ampiezza 3 è definita come differenza di due $u(t)$ traslate.

3) Fare il grafico della traslata verso destra di $\frac{3}{2}$ della porta $p_3(t)$:

$$p_3(t-\frac{3}{2}) = u(t) - u(t-3)$$

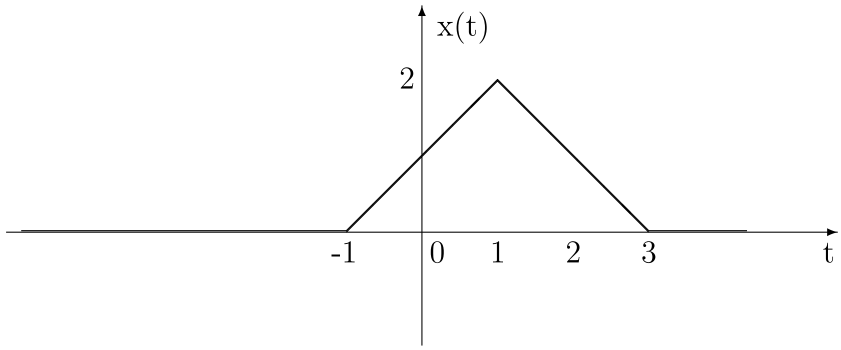
4) Fare il grafico del seguente segnale:

$$x(t) = 2(t+1)[u(t+1)-u(t)] + 2[u(t)-u(t-2)] - 2(t-3)[u(t-2)-u(t-3)] \quad (1)$$

si osservi che $x(t)$ può essere scritto in modo equivalente nel modo seguente:

$$x(t) = 2(t+1)p_1(t+\frac{1}{2}) + 2p_2(t-1) - 2(t-3)p_1(t-\frac{5}{2}) \quad (2)$$

5) Utilizzando le funzioni a gradino e le porte o loro traslate, descrivere, in modo analogo alle (1) e (2), il seguente segnale:



8.2] Limiti distribuzionali

Si tenga presente che se una successione di funzioni $x_n(t)$ ha le seguenti caratteristiche:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} x_n(t)\, dt = 1$ per ogni n;

b) $x_n(0) \longrightarrow +\infty$ per n che tende a $+\infty$;

c) l'insieme delle $t \in \mathbf{R}$ per cui $x_n(t) \neq 0$ è contenuto in un intervallo $[a_n, b_n]$ la cui ampiezza $b_n - a_n$ tende a zero;

allora

$$x_n(t) \longrightarrow \delta(t)$$

per $t \rightarrow +\infty$ nel senso delle distribuzioni.

B] Si provi che:

$$x_n(t) = n^2(t + \frac{1}{n})p_{\frac{1}{n}}(t + \frac{1}{2n}) - n^2(t - \frac{1}{n})p_{\frac{1}{n}}(t - \frac{1}{2n})$$

tende alla delta di Dirac $\delta(t)$ e si disegni $x_n(t)$ per $n = 1, 2, 3, \cdots$.

8.3] Derivate distribuzionali

Si ricordi che la derivata distribuzionale di $u(t)$ è $\delta(t)$, ovvero:

$$\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}u(t-a) = \delta(t-a)$$

Se il segnale $x(t)$ è continuo si ha che:

$$\begin{aligned} x(t)\delta(t) &= x(0)\delta(t) \\ x(t)\delta(t-a) &= x(a)\delta(t-a) \end{aligned}$$

Se inoltre $x(t)$ ha derivata prima continua, si ha che:

$$\begin{aligned} x(t)\delta'(t) &= x(0)\delta'(t) - x'(0)\delta(t) \\ x(t)\delta'(t-a) &= x(a)\delta'(t-a) - x'(a)\delta(t-a) \end{aligned}$$

C] Si calcoli la derivata prima del seguente segnale:

$$x(t) = (t+1)[u(t+1) - u(t-1)]$$

8.4] Derivate distribuzionali di segnali lineari a tratti per via grafica

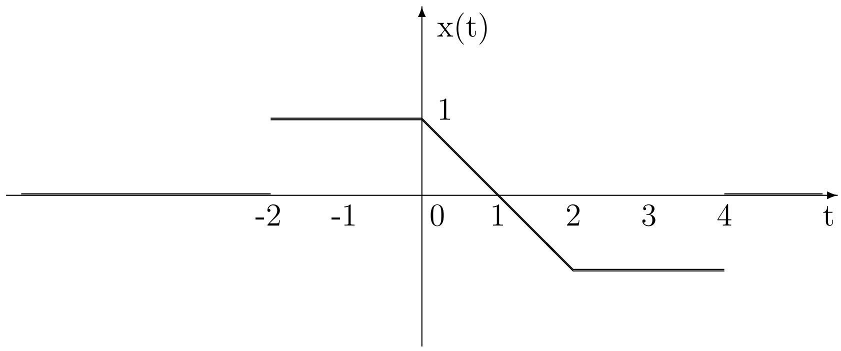
D] Si faccia graficamente la derivata del segnale $x(t)$ del punto C] precedente, ricordando che:

1) negli intervalli ove $x(t)$ è derivabile, la derivata distribuzionale coincide con la derivata classica;

2) nei punti t_i ove vi è un punto angoloso, la derivata distribuzionale di $x(t)$ ha un salto (discontinuità di prima specie finita) dato dalla differenza tra la derivata destra di $x(t)$ in t_i e la la derivata sinistra di $x(t)$ in t_i;

3) nei punti t_j ove $x(t)$ ha un salto (discontinuità di prima specia finita) la derivata distribuzionale ha una delta di Dirac $k\delta(t-t_j)$ ove k è l'ampiezza del salto: $k = x(t_j^+) - x(t_j^-)$.

E] Tenendo presenti le considerazioni del punto D] precedente, si derivi graficamente il segnale seguente:



Si ritrovi il risultato ottenuto graficamento con i calcoli.

8.5] Prodotto di convoluzione

Si ricordi che il prodotto di convoluzione è definito nel modo seguente:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)\, d\tau$$

F] Calcolare:

1) $x_1(t) = u(t) * u(t)$
2) $x_2(t) = u(t) * \mathrm{e}^{-t}u(t)$
3) $x_3(t) = p_1(t) * p_1(t)$

Si facciano poi i grafici di $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$.