Scheda N. 7/2008

Scomposizione in fratti semplici

7.1 Poli semplici

Nello svolgere gli esercizi si tenga presente che se:

$$F(s) = \frac{N_m(s)}{D_n(s)}$$

ove $s = \sigma + \mathrm{j}\omega$, $N_m(s)$ è un polinomio di grado m e $D_n(s)$ è un polinomio di grado n, $F(s)$ ha n poli *semplici* s_1, s_2, s_3, $\cdots$,s_n si dice scomposizione in fratti semplici la seguente espressione:

$$F(s) = Q_{m-n}(s) + \frac{R_F(s_1)}{(s-s_1)} + \frac{R_F(s_2)}{(s-s_2)} + \frac{R_F(s_3)}{(s-s_3)} + \cdots + \frac{R_F(s_n)}{(s-s_n)}$$

ove l'addendo $Q_{m-n}(s)$ è presente solo se $m \geq n$ e col simbolo $R_F(s_i)$ si indica il residuo della funzione F in s_i.

A] Scomporre in fratti semplici le seguenti funzioni:

1) $F(s) = \dfrac{s^3 - 4s^2 + 6s - 7}{s^2 - 4s + 3}$

2) $F(s) = \dfrac{s^5 + 2s^4 - 9s^3 - 14s^2 + 13s + 15}{s^3 + 2s^2 - 9s - 18}$

7.2 Poli multipli

Nello svolgere gli esercizi si tenga presente che se:

$$F(s) = \frac{N_m(s)}{(s-s_0)^n}$$

ove $s = \sigma + \mathrm{j}\omega$, $N_m(s)$ è un polinomio di grado m e $N_m(s_0) \neq 0$ si ha la seguente scomposizione in fratti semplici:

$$\begin{aligned} F(s) \quad &= \quad Q_{m-n}(s) \quad + \quad \frac{R_{(s-s_0)^{n-1}F(s)}(s_0)}{(s-s_0)^n} + \frac{R_{(s-s_0)^{n-2}F(s)}(s_0)}{(s-s_0)^{n-1}} + \\ &+ \quad \cdots \quad + \quad \frac{R_{(s-s_0)F(s)}(s_0)}{(s-s_0)^2} + \frac{R_{F(s)}(s_0)}{(s-s_0)} \end{aligned}$$

ove l'addendo $Q_{m-n}(s)$ è presente solo se $m \geq n$ e col simbolo $R_{(s-s_0)^{k-1}F(s)}(s_0)$ si indica il residuo della funzione $(s-s_0)^k F(s)$ in s_0.

B] Scomporre in fratti semplici le seguenti funzioni:

3) $F(s) = \dfrac{s^2 + 6s + 9}{(s+2)^2}$

4) $F(s) = \dfrac{2s^3 + 4s^2 + 3s - 1}{(s+1)^2(s-1)}$

5) $F(s) = \dfrac{2s^4 - 8s^2 + 2}{s^4 - 2s^2 + 1}$

7.3 Poli complessi coniugati

Nello svolgere gli esercizi si tenga presente che se:

$$F(s) = \frac{N_m(s)}{(s-\sigma_0)^2 + \omega_0^2}$$

ove $s = \sigma + \mathrm{j}\omega$, $N_m(s)$ è un polinomio di grado m e $s_0 = \sigma_0 \pm \mathrm{j}\omega_0$ due poli complessi coniugati di F, si scompone in fratti $F(s)$, in vista della antitrasformata di Laplace, nel modo seguente:

$$F(s) = Q_{m-n}(s) + 2\alpha \frac{(s-\sigma_0)}{(s-\sigma_0)^2 + \omega_0^2} - 2\beta \frac{\omega_0}{(s-\sigma_0)^2 + \omega_0^2}$$

ove l'addendo $Q_{m-n}(s)$ è presente solo se $m \geq n$ e ove

$$\alpha + \mathrm{j}\beta = R_{F(s)}(\sigma_0 + \mathrm{j}\omega_0)$$

.

C] Scomporre in fratti le seguenti funzioni:

6) $F(s) = \dfrac{s^2 + 6s + 26}{s^2 + 4s + 13}$

7) $F(s) = \dfrac{2s^2 + 6s + 4}{s^2 + 2s + 5}$

7.4 Poli

D] Tenendo presenti le considerazioni dei punti A], B] e C] precedenti, si scompongano in fratti semplici le seguenti funzioni:

8) $F(s) = \dfrac{3s^5 + 7}{2s^3(s^2+1)}$

9) $F(s) = \dfrac{s^3 + 4s^2 + 5s + 4}{s^3 + 4s}$