Scheda N. 6/2008

Residui e calcolo di integrali con i residui

6.1] Residui

Nello svolgere gli esercizi di questa scheda si ricordino le regole pratiche di calcolo dei residui:

a) **Poli** 1^o **ordine:** se $f(z)$ è espressa nel modo seguente

$$f(z) = \frac{h(z)}{z - z_0}$$

con $h(z)$ analitica in un intorno di z_0 e $h(z_0) \neq 0$, il residuo di $f(z)$ in z_0 è dato da:

$$\boxed{R_{f(z)}(z_0) = h(z_0),}$$

Se $f(z)$ è espressa da una frazione:

$$f(z) = \frac{n(z)}{d(z)},$$

con $n(z_0) \neq 0$, si ha anche:

$$\boxed{R_{f(z)}(z_0) = \frac{n(z_0)}{d'(z_0)}}$$

b) **Poli ordine** N**:** se $f(z)$ è espressa nel modo seguente

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^N}$$

con $h(z)$ analitica in un intorno di z_0 e $h(z_0) \neq 0$, il residuo di $f(z)$ in z_0 è dato da:

$$\boxed{R_{f(z)}(z_0) = \frac{1}{(N-1)!} h^{(N-1)}(z_0)}$$

A] Si calcolino i residui, nel punto z_0 indicato, delle seguenti funzioni:

$$
\begin{array}{llr}
1) & f(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)} & z_0 = 0 \\
2) & f(z) = \dfrac{z+1}{z(z-1)} & z_0 = 1 \\
3) & f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{(z^2-3z+2)} & z_0 = 2 \\
4) & f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2(z+3)} & z_0 = 0 \\
5) & f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2} & z_0 = -1
\end{array}
$$

B] Si calcolino i residui, nel punto z_0 indicato, delle seguenti funzioni:

$$
\begin{array}{llr}
1) & f(z) = \dfrac{z^3(z^2+1)}{(z^2-4)(z^2-9)} & z_0 = 3 \\
2) & f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z(z-1)^3}{(z^2-1)^3(z^2+4)^2} & z_0 = 2\mathrm{j} \\
3) & f(z) = \dfrac{z\cos z - \sin z}{z^4(z^2-\pi^2)} & z_0 = \pi \\
4) & f(z) = \dfrac{\cos z}{z^4(z^2+2z+2)} & z_0 = -1+\mathrm{j} \\
5) & f(z) = \dfrac{z^2 \sin z \sinh z}{z^5(z^2+\pi^2)(z^2-\pi^2)^4} & z_0 = 0
\end{array}
$$

6.2] Integrali di linea in campo complesso col metodo dei residui

Ricordando che:

$$\oint_\gamma f(z)\, dz \;=\; 2\pi\mathrm{j} \sum_k R_{f(z)}(z_k)$$

ove $f(z)$ è analitica su γ e sulla regione Ω di cui γ è bordo, eccetto che in $z_k \in \Omega$ $(k = 1, 2, ..., n)$, $R_f(z_k)$ è il residuo di $f(z)$ in z_k.

C] Si calcolino i seguenti integrali:

1) $$\oint_{\gamma_1} \frac{z^2}{z^4+1}\, dz$$

ove γ_1 è il cammino chiuso, percorso in senso antiorario, dato dalla unione del segmento $[-2, 2]$ e dalla semicirconferenza di raggio 2 e centro lo zero situata nel semipiano delle parti immaginarie di z maggiori di zero.

2) $$\oint_{\gamma_2} \frac{1}{(z^2+4)(z^2+25)}\, dz$$

ove γ_2 è il cammino chiuso, percorso in senso antiorario, dato dalla unione del segmento $[-3, 3]$ e dalla semicirconferenza di raggio 3 e centro lo zero situata nel semipiano delle parti immaginarie di z maggiori di zero.

6.3] Integrali impropri di funzioni razionali col metodo dei residui

Si ricordi che se

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

con $P_n(x)$ polinomio di grado n e $Q_m(x)$ un polinomio di grado m, se $m \geq n+2$ si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx = 2\pi \mathrm{j} \left(\sum_k R_f(z_k) + \frac{1}{2} \sum_k R_f(\tilde{z}_h) \right)$$

ove z_k sono i poli del semipiano superiore della estensione $f(z)$ al piano complesso della funzione $f(x)$ e ove $\tilde{z}_k$ sono i poli di $f(z)$ che stanno sull'asse reale.

D] Si calcoli:

1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+49}\,dx$$

2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+16}\,dx$$

6.4] Integrali col lemma di Jordan A

Si ricordi che se:

$$f(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}at}$$

$t \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, $s = t + \mathrm{j}\omega$,
grado di Q(s) $>$ grado di P(s)
s_k zeri di $Q(s)$ con $1 \leq k \leq n$ $\quad \mathrm{Im}\, s_k > 0$ $\quad P(s_k) \neq 0$
$\tilde{s}_i$ zeri semplici di $Q(s)$ con $1 \leq i \leq m$ $\quad \mathrm{Im}\, \tilde{s}_i = 0$ $\quad P(\tilde{s}_i) \neq 0$
$\hat{s}_h$ zeri di $Q(s)$ con $1 \leq h \leq p$ $\quad \mathrm{Im}\, \hat{s}_h < 0$ $\quad P(\hat{s}_h) \neq 0.$

Allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}at}}{Q(t)}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} +2\pi\mathrm{j} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} R_{f(s)}(s_k) + \frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{m} R_{f(z)}(\tilde{s}_i) \right) & a > 0 \\ -2\pi\mathrm{j} \left(\sum\limits_{h=1}^{p} R_{f(s)}(\hat{s}_h) + \frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{m} R_{f(z)}(\tilde{s}_i) \right) & a < 0. \end{cases} \tag{1}$$

E] Si calcolino i seguenti integrali:

1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}\, dt$$

2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{7}{t^2+49}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{j}t}\, dt$$

6.5] Integrali col lemma di Jordan B

Si ricordi che se:

$$f(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}\, \mathrm{e}^{st} \qquad\qquad s = \sigma + \mathrm{j}\omega$$

con $P(s)$ polinomio di grado strettamente minore di $Q(s)$ e $Q(s)$ che non si annulla sulla retta parallela all'asse immaginario passante per σ_0, si ha che:

$$\int_{\sigma_0-\mathrm{j}\infty}^{\sigma_0+\mathrm{j}\infty} \left(\frac{P(s)}{Q(s)}\right) \mathrm{e}^{st}\, ds = \begin{cases} -2\pi\mathrm{j}\sum_k R_f(s_k) & t<0 \\ +2\pi\mathrm{j}\sum_h R_f(\tilde{s}_h) & t>0 \end{cases}$$

ove s_k sono i poli di $f(s)$, tali che $\mathbf{Re}\ s_k > \sigma_0$, mentre $\tilde{s}_h$ sono i poli di $f(s)$ tali che $\mathbf{Re}\ \tilde{s}_h < \sigma_0$.

F] Si calcolino i seguenti integrali:

1)

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \int_{1-\mathrm{j}\infty}^{1+\mathrm{j}\infty} \left(\frac{1}{s}\right) \mathrm{e}^{st}\, ds$$

2)

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \int_{-\mathrm{j}\infty}^{+\mathrm{j}\infty} \left(\frac{s+1}{s^2+2s+2}\right) \mathrm{e}^{st}\, ds$$