Scheda N. 5/2008

Analiticità, serie di Laurent e classificazione delle singolarità

5.1] Condizioni di Cauchy-Riemann

Richiamiamo qualche formula:
La condizione di Cauchy-Riemann ha una delle seguenti espressioni:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{j}} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} & = & \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & = & -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \tag{2}$$

A] Si dica se le seguenti funzioni soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann:

1) $f(x,y) = x\mathrm{e}^x \cos y - y\mathrm{e}^x \sin y + \mathrm{j}(x\mathrm{e}^x \sin y + y\mathrm{e}^x \cos y)$

2) $f(x,y) = (x + \mathrm{j}y)\mathrm{e}^{x+\mathrm{j}y}$

3) $f(z) = z\mathrm{e}^z$

Si osservi che le tre espressioni precedenti sono tre scritture differenti della stessa funzione. Dalla espressione 3) si passa alla 2) ponendo z=x+jy e poi alla 1) usando la formula di Eulero per $\mathrm{e}^{x+\mathrm{j}y}$ e moltiplicando. Viceversa dalla espressione 1) è difficile passare alla espressione 3). Per fare questo si proceda nel modo seguente:

a) Si ponga y=0 nella espressione 1);

b) si prolunghi l'espressione della sola x alla variabile complessa z, ponendo z al posto di x.

Il passaggio b) è giustificato dal fatto che se due funzioni analitiche sono uguali sull'asse reale allora sono uguali in tutto il piano complesso.

B] Si dica se le seguenti funzioni soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann:

4) $f(x,y) = x^2 - y^2 + x + \mathrm{j}(2xy + y)$

5) $f(x,y) = (x + \mathrm{j}y)^2 + x + \mathrm{j}y$

6) $f(z) = z^2 + z$

Si ripetano le considerazioni fatte per le funzioni dei punti 1), 2) e 3).

5.2] Serie di Laurent e classificazione delle singolarità

C] Utilizzando sviluppi noti, si facciano gli sviluppi in serie di Laurent, in potenze di $z - z_0$, delle seguenti funzioni:

1) $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z^5} \quad z_0 = 0$

2) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^4} \quad z_0 = 0$

3) $f(z) = \dfrac{(z-1)}{(z^2-1)} \quad z_0 = 0$

4) $f(z) = \dfrac{\cosh z + \sinh z - \sin z - \cos z}{z^3} \quad z_0 = 0$

5) $f(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 4 \quad z_0 = 2$

6) $f(z) = z \cos \frac{1}{z} \quad z_0 = 0$

7) $f(z) = \frac{\cos \pi z}{1 - z} \quad z_0 = 0$

8) $f(z) = \frac{\cos \pi z}{1 - z} \quad z_0 = 1$

Verificare che lo sviluppo relativo al punto 7) e lo sviluppo relativo al punto 8) convergono allo stesso risultato se calcolati per $z = 0$.

D] Tenendo presente il fatto che $f(z)$ ha un polo di ordine $N \geq 1$ in z_0 se e solo se si può scrivere nel modo seguente:

$$\boxed{f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^N}}$$

con $h(z)$ analitica in un intorno di z_0 e $h(z_0) \neq 0$, classificare tutte le singolarità delle seguenti funzioni analitiche:

1) $\dfrac{z^3(z^2+1)}{(z^2-4)(z^2-9)}$

2) $\dfrac{e^z(z-1)^3}{(z^2-1)^3(z^2+4)^2}$

3) $\dfrac{\cos z}{z^4(z^2+2z+2)}$

4) $\dfrac{z^2 \sin z \sinh z}{z^5(z^2+\pi^2)(z^2-\pi^2)^4}$