**Scheda N. 4/2008**

**Serie di Fourier**

## 4.1] Coefficienti di Fourier ed energia

Richiamiamo qualche formula:

$$x(t) = a_0 + \sum_1^{+\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$$

$$\|x(t)\|^2 = \int_0^T |x(t)|^2 \ \mathrm{d}t = T a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_1^{+\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

$$\|x(t) - x_n(t)\|^2 = \|x(t)\|^2 - T a_0^2 - \frac{T}{2} \sum_1^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

$$\begin{array}{lllll} a_0 & = & c_0 & = & \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, dt & \\ a_k & = & c_k + c_k^* & = & \frac{2}{T}\int_0^T x(t) \cos k\omega t\, dt & k > 0 \\ & & & & & \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \\ b_k & = & \mathrm{j}(c_k - c_k^*) & = & \frac{2}{T}\int_0^T x(t) \sin k\omega t\, dt & k > 0 \end{array}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega t}$$

$$\|x(t)\|^2 = \int_0^T |x(t)|^2 \ \mathrm{d}t = T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2$$

$$\|x(t) - x_n(t)\|^2 = \|x(t)\|^2 - T \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

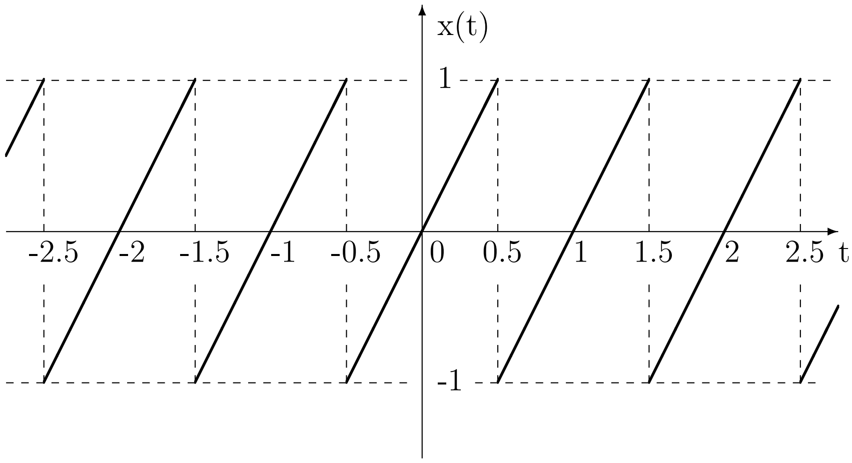
$$\begin{array}{lllll} c_0 & = & a_0 & = & \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, dt & \\ c_k & = & \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{j}b_k) & = & \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega t}\, dt & k > 0 \\ c_{-k} & = & c_k^* & & & k > 0 \end{array}$$

**Osservazione.** Il calcolo dei coefficienti può essere fatto mediante un integrale su un qualunque intervallo di ampiezza T e non è quindi necessario fare il calcolo nell'intervallo [0,T]:

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \ldots\ldots \ \mathrm{d}t \qquad ; \qquad \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \ldots\ldots \ \mathrm{d}t$$

**4.2] Calcolo di serie di Fourier**

A] Sia dato il seguente segnale $x(t)$:




1) Si determini il periodo, la frequenza angolare e la frequenza di $x(t)$;

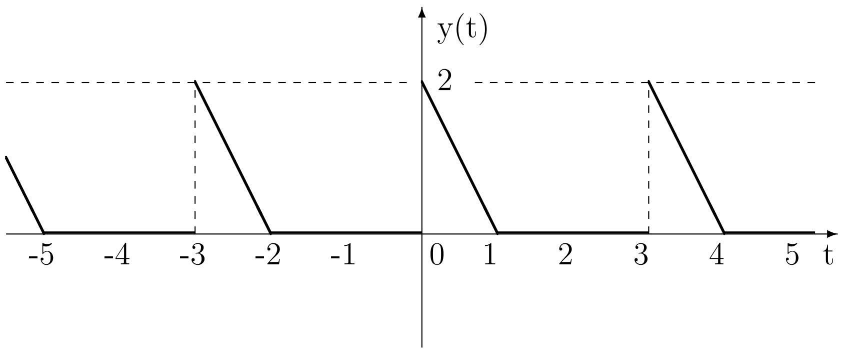
2) si calcolino i coefficienti della serie di Fourier di $x(t)$;

3) si scriva la serie di Fuorier di $x(t)$;

4) si calcoli l'approssimazione $\|x(t) - x_2(t)\|^2$ fornita dal polinomio di Fourier di $x(t)$ di ordine 2;

5) si discuta la convergenza della serie di Fourier di $x(t)$, precisando a quale valore converge per $t = \frac{1}{2}$.

B] Sia dato il seguente segnale $y(t)$:




1) Si determini il periodo, la frequenza angolare e la frequenza di $y(t)$;

2) si calcolino i coefficienti della serie di Fourier di $y(t)$;

3) si scriva la serie di Fuorier di $y(t)$;

4) si calcoli l'approssimazione $\|y(t) - y_2(t)\|^2$ fornita dal polinomio di Fourier di $y(t)$ di ordine 2;

4) si discuta la convergenza della serie di Fourier di $y(t)$, precisando a quale valore converge per $t = 0$.